Riskin mittaaminen ja jakaminen

Pro gradu -tutkielma

Leena Vuorivirta

syksy 2020

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Helsingin yliopisto

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Koulutusohjelma — Utbildningsprogram — Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen		Matematiikan ja tilastotieteen koulutusohjelma

Tekijä — Författare — Author

Leena Vuorivirta

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Riskin mittaaminen ja jakaminen

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Syksy 2020	41 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Riskin mittaaminen on sijoittajille, vakuutusyhtiöille ja viranomaisille tärkeää. Riskin mittaaminen, vaikka tuottojakauma tai tulevien korvaustapahtumien jakakauma olisikin tiedossa, on haastavaa, mutta samalla tärkeää. Sijoitusmaailmassa yleisesti käytetään varianssia riskin mittamisessa. Vakuutusyhtiöiden viranomaisvaatimuksissa käytetään rinnakkain kahta eri riskimittaa eli sekä niin sanottua VaR(Value at Risk)-mittaa että ES(Expected Shortfall)-mittaa, jotka molemmat voidaan nähdä saman RVaR(Range Value at Risk)-mitan erikoistapauksina. Riskimitalla olisi toivottavaa olla tiettyjä ominaisuuksia, jotta sen soveltaminen tunnettujen talousteorioiden näkökulmasta olisi mielekästä. Jotta riskimittaa voidaan kutsua rahoitusriskimitaksi, sen tulisi olla monotoninen ja toteuttaa kassainvarianssiominaisuus. Jotta taas riskimitta olisi koherentti sen tulisi näiden lisäksi olla positiivisesti homogeninen ja subadditiivinen. Varianssi ei täytä edes rahoitusriskimitalta vaadittuja ominaisuuksia ja edellämainituista vain ES-mitta on koherentti. Rahoitusriskimitan on siis mitattava suuremmasta riskistä suuremman tappion ja riskittömällä sijoituksella ei saisi olla vaikutusta riskiin. Koherentti mitta takaa näiden lisäksi, että sijoitetulla summalla ei ole vaikutusta riskiin ja toisaalta hajautuksesta voi olla hyötyä, muttei haittaa. Näitä kaikkia ominaisuuksia pidetään yleisesti toivottavina.

Työn keskiössä on RVaR-mitta, joka ei toteuta koherentilta mitalta haluttua subadditiivisuusominaisuutta. Osoitetaan kuitenkin, että toimijoiden RVaR-mitoista yhdistetyllä RVaR-mitalla on erityinen subadiitiivinen yhteys. Lisäksi tarkastellaan RVaR-mittaa sekä kilpailullisen riskinjaon että toimijoiden yhteistyössä toteuttaman riskinjaon näkökulmista. Ensimmäinen mainituista on tasapainoteoreettinen näkökulma, jossa jokainen toimija pyrkii minimoimaan omia tappioitaan ja jälkimmäinen Pareto-optimaalinen näkökulma, jossa esimerkiksi konserni jakaa tytäryhtiöidensä riskiä optimaalisella tavalla. Lopulta näytetään, että tietyin edellytyksin tasapainoallokaatio on olemassa ja se on tällöin myös Pareto-optimaalinen.

Riskimittojen tarkastelua jatketaan salkunvalintaongelman sovelluksella. Esimerkissä tarkastellaan kolmen riskillisen arvopaperin yhden periodin markkinoita, joilta valitaan kaksi salkkua - toinen yleisesti tunnetun arvopapreiden hinnoittelumallin eli niin sanotun CAP-mallin mukainen varianssin minimoiva salkku sekä kilpaileva salkku. Esimerkki osoittaa varianssin heikon kohdan symmetrisenä riskimittana, joka rankaisee myös suuremmista tuottoarvoista.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Riskimitta, Value at Risk, Range Value at Risk, Expected Shortfall

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto **3**

2 Riskin jakaminen **5**

2.1 Riskimitat 6

2.1.1 Riskimittojen esittely 7

2.1.2 RVaR-mitan ominaisuuksia 11

2.2 Markkinat 14

2.3 Tasapainoallokaatio 15

2.4 Pareto-optimaalinen allokaatio 17

3 Tasapainoallokaation olemassaolo **25**

4 Salkunvalintaongelma ja riskimitat **32**

4.1 CAP-mallin mukainen optimaalinen salkku 32

4.2 Arvopaperit 35

4.3 Arvopaperisalkut 36

5 Johtopäätökset **41**

1 Johdanto

Tässä työssä käsiteellään riskin jakamisen ja sen mittaamisen ongelmaa, joka esiintyy niin sijoitus- kuin vakuutusmarkkinoillakin. Riskin jakamisen ongelma esiintyy eri käytännön yhteysissä kuten vakuutus-jälleenvakuutus-sopimuksissa, riskin jakamisessa sijoittajien välillä sekä säätelypääomien määrittämisessä.

Sijoitusmarkkinoilla suuremmat tuotto-odotukset kytkeytyvät usein suurempiin riskeihin. Sijoittajalle on tärkeää selvittää tuotto-odotuksiin liittyvää riskiä ja hän pyrkii valitsemaan sellaisen joukon arvopapereita eli salkun, jolla riskit ovat tuotto-odotuksiin nähden kohtuullisella tasolla. Toisinaan sijoittaja pyrkii ottamaan huomioon myös tappiolta suojaavia elementtejä arvopapereita valitessaan. Suojautumista voi tehdä esimerkiksi yksinkertaisesti hajauttamalla eri kohteisiin.

Vakuutusyhtiöt tarjoavat erilaisia vakuutustuotteita, joista vakuutettu maksaa tyypillisesti kuukausittain tai vuosittain vakuutusmaksua ja vakuutusyhtiö puolestaan sitoutuu kantamaan kyseiseen vakuutukseen liittyvää riskiä. Jo pelkästään vakuutusten hinnoittelu vaatii käsitystä riskeistä. Esimerkiksi henkivakuutuksen ollessa kyseessä vakuutetun kuollessa vakuutusyhtiö voi maksaa kertakorvauksen. Vakuutusyhtiön näkökulmasta riski liittyy siis tuleviin maksuihin, joita vastaavat vakuutusmaksut tulevat yhtiöön tyypillisesti ennen vakuutustapahtumaa. Vakuutusyhtiön vakavaraisuuden kannalta on tärkeää, että tulevat vakuutuskorvaukset saadaan maksettua ilman vararikkoa. Vakuutetun suojaksi ja vakuutusyhtiön vararikon ennaltaehkäisyksi vakuutusyhtiöiden pääomiin liittyy myös viranomaissäädöksiä, joissa määritetään myös sitä, miten riskien suuruutta arvioidaan ja millaisia pääomia vakuutusyhtiöillä tulee olla. Tämän lisäksi vakuutusyhtiöt jälleenvakuuttavat toisten yhtiöiden vakuutuksia tai niiden osia, mikä vaatii myös hyvää ymmärrystä riskeistä ja niiden hinnoittelusta.

Tämän työn aluksi käsitellään riskimittoja ja riskin mittaamista sekä määritellään rahoitusmitan ja koherentin riskimitan käsitteet. Riskimitoista varmastikin tunnetuinta mittaa eli varianssia käsitellään lyhyesti, mutta koska se ei täytä edes rahoitusriskimitan perusominaisuuksia, keskitytään enemmän muihin riskimittoihin. Muista riskimitoista esitellään tarkemmin rahoitusriskimitat VaR (Value at Risk) ja RVaR (Range Value at Risk) sekä koherenttiriskimitta ES (Expected Shortfall), jotka kaikki kuuluvat samaan perheeseen ja joista riskimitat VaR ja ES voidaan nähdä RVaR-mitan erikoistapauksina. Nykyisissä vakuutus- ja rahoitusyhtiöiden säädöksissä käytetään sekä VaR- että ES-mittaa rinnakkain.

Riskinjakamisen ongelmaan perehdytään sekä kilpailullisen tasapainoteorian että yhteistyössä suoritettavan pareto-optimaalisen jaon kautta. Tasapainoteoreettinen näkökulma lähtee siis siitä, että jokainen toimija pyrkii maksimoimaan hyötyään eli minimoimaan riskejään itsenäisenä toimijana ja omalla budjettirahoituksellaan. Pareto-optimaalinen näkökulma taas lähtee siitä, että haetaan kokonaisuuden kannalta parasta tulosta. Päätulos yhdistää nämä lähestymistavat ja siinä näytetään, että tasapainoallokaatio on olemassa ja että se on välttämättä myös Pareto-optimaalinen. Tulosten todistus seuraa pääpiirteittäin Embrechts ym artikkelia [1], jossa tämän työn päätulos on teoreema 3. Artikkelia käytetään tämän työn päälähteenä.

Viimeisessä kappaleessa tarkastellaan sijoitusesimerkkitilannetta markkinoilla, joilla on kolme riskillistä arvopaperia. Kappaleessa vertaillaan kahta erilaista sijoitussalkkua, joista ensimmäinen on hyvin yleisesti käytetyn CAP-mallin mukainen ja toinen sopivasti valittu vertailusalkku. Muodotettujen salkkujen riskejä verrataan VaR-mitan avulla ja havaitaan, että varianssin minimointi ei kaikissa tilanteissa välttämättä tarjoa parasta salkun valintaa.

2 Riskin jakaminen

Riskin jakamisen ongelmaa pohdittaessa tarvitsee määritellä yhteys, jossa ongelmaa käsitellään, tapa mitata riskiä ja periaatteet, joilla riski jakautuu. Tässä kapaleessa määritellään tämän työn kannalta tarpeellinen tausta ongelman käsittelylle. Aluksi kuvataan lyhyesti taustalla oleva todennäköisyysavaruus ja sen ominaisuuksia, minkä jälkeen määritellään yleinen riskimitan käsite kuten Embrechts ym artikellissa [1] sekä esitellään työn kannalta olennaisia riskimittoja ja niiden ominaisuuksia. Lopulta päädytään tarkastelemaan riskinjakoa sekä kilpailullisen riskinjaon eli tasapainoteorian että yhteistyössä jaetun riskin eli pareto-optimaalisuuden kannalta. Tasapainoteoriaan liittyen määritellään Arrow-Debrew-tasapainon käsite. Pareto-optimaalisuuden käsite määritellään tässä kontekstissa sekä esitetään eräs Pareto-optimaalinen allokaattio.

Koko työssä taustalla oletetaan olevan todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, missä Ω on perusjoukko, joka koostuu alkeistapauksista. $\mathcal{F}$ on sigma-algebra joukolla Ω, jonka joukot ovat tapahtumia, ja $\mathbb{P}$ on todennäköisyysmitta, joka liittää todennäköisyyden jokaiseen sigma-algebran $\mathcal{F}$ joukkoon. Olkoon $\mathcal{X}$ joukko reaalisia, integroituvia satunnaismuuttujia (toisin sanoen $\mathcal{X} \subset L^1$), jotka on määritelty annetussa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Melkein varmasti samoja satunnaismuuttujia käsitellään tässä ekvivalentteina. Lisäksi oletetaan, että kaikille satunnaismuuttujille $X \in \mathcal{X}$ on olemassa sellainen satunnaismuuttuja $Y \in \mathcal{X}$, joka on riippumaton satunnaismuuttujasta X.

Määritellään vielä työssä käytettäviä yleisiä merkintöjä vastaavasti kuten artikkelissa Embrechts ym [1]. Olkoon $p \in (0,1)$ ja F jokin ei-vähenevä funktio. Olkoon lisäksi

$$F^{-1}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$

Olkoon nyt U_X tasajakautunut satunnaismuuttuja välillä $[0,1]$ siten, että $F^{-1}(U_X) = X$ melkein varmasti ja jossa F on satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Jos nyt X on jatkuvasti jakautunut, niin $U_X = F(X)$ melkein varmasti. Yleisille satunnaismuuttujille X, U_X:n olemassaolo on taattu. Embrechts ym käsittelee tämän kappaleen asiaa artikkelin sivulla 7 [1].

Tässä työssä käytetään lisäksi seuraavia merkintöjä:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \beta_i = \max\{\beta_i\} \text{ ja } \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i = \min\{\alpha_i\}$$

Tulosten yleisyyden kärsimättä voidaan myös valita satunnaismuuttujien järjestys siten, että $\beta_n = \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i$.

2.1 Riskimitat

Riskien suuruutta voidaan kuvata äärettömillä laajennetulla reaaliluvulla. Tätä lukua kutsutaan riskimitaksi. Riskimitta on siis riskiä kuvaava tunnusluku, joka voidaan laskea riskiä kuvaavasta satunnaismuuttujasta, ja sitä voidaan käyttää esimerkiksi riskien vertailuun. Tyypillisesti riskimitta voidaan määrittää, kun satunnaismuuttujan jakauma tunnetaan. Tässä kappaleessa määritellään yleinen riskimitan käsite, kuvataan riskimitoilta toivottuja ominaisuuksia sekä määriteellään kaksi eritystapausta riskimitoista: rahoitusriskimitta sekä koherentti riskimitta.

Yleisesti riskimitta on kuvaus kuten seuraava määritelmä 2.1 esittää.

Määritelmä 2.1. *Riskimitta* on kuvaus $\rho : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$.

Riskimitta liittää satunnaismuuttujan johonkin äärettömillä lajennetun reaalilukujoukon alkioon. Riskimitalta haluttuja ominaisuuksia Föllmer ja Schieldin [2] ja Embrects ym [1] mukaisesti määritelmän 2.2 mukaiset ominaisuudet.

Määritelmä 2.2. Kaikille X, $Y \in \mathcal{X}$:

(a) Monotonisuus: $\rho(X) \leq \rho(Y)$ jos $X \leq Y$

(b) Kassainvarianssi: $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ kaikille $c \in \mathbb{R}$

(c) Positiivinen homogenisuus: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ kaikille $\lambda > 0$

(d) Subadditiivisuus: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

(e) Yhtäsuuruus: $\rho(X) = \rho(Y)$ jos X ja Y ovat samoin jakautuneita.

Mitan monotonisuusvaatimus takaa sen, että suuremmasta riskistä aiheutuu suurempi tappio. Kassainvarianssi puolestaan kuvaa sitä, että vakio summalla eli riskittömällä sijoituksella (siis toisin kuin satunnaismuuttujalla) ei ole vaikutusta otettuun riskiin. Positiivinen homogenisuusehto puolestaan kertoo, että yksittäiseen esimerkiksi osakkeeseen sijoitettu pääoman määrä ei vaikuta riskiin eli riskin suuruuteen ei voida vaikuttaa sijoittamalla kerralla suurempi tai pienempi määrä rahaa tiettyyn arvopaperiin. Subadditiivisuus taas saa aikaan sen, että kahden erillisen riskillisen tuotteen yhteinen riski on korkeintaan näiden riskien summa. Tämä on erittäin toivottu ominaisuus, sillä yleisesti talousteoria lähtee siitä, että hajautuksesta voi olla hyötyä, mutta ei haittaa. Nämä kaikki ominaisuudet vaikuttavat erittäin luonnollisilta ja riskimitalta toivotuilta.

Määritellään seuraavaksi riskimittojen erikoistapauksina rahoitusriskimitta sekä koherenttiriskimitta. Nämä ovat sellaisia riskimittoja, jotka yhdistävät edellä lueteltuja ominaisuuksia.

Määritelmä 2.3. *Rahoitusriskimitta* on sellainen riskimitta, joka täyttää määritelmän 2.2 ehdot (a) ja (b).

Rahoitusriskimitan on siis oltava monotoninen ja kassainvariantti.

Määritelmä 2.4. *Koherentti riskimitta* on sellainen riskimitta, joka täyttää riskimitan määritelmän 2.2 ehdot (a)-(d).

Koherentti riskimitta on siis aina myös rahoitusriskimitta, minkä lisäksi sen on oltava myös positiivisesti homogeninen ja subadditiivinen.

Tavallisesti tunnetuimpana riskimittana pidettäneen varianssia. Varianssi ei kuitenkaan täytä edellytyksiä edes rahoitusriskimitasta, eikä siten myöskään koherentista riskimitasta. Esimerkissä 2.1 näytetään, että varianssi ei toteuta määritelmän 2.2 ehtoa (b), eikä ole siten rahoitusriskimitta.

Esimerkki 2.1. Olkoon $X \in \chi$ ja $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin:

$$Var(X + c) = Var(X) \neq Var(X) + c$$

Tässä työssä esitellään riskimitoista tarkemmin VaR (Value at Risk), RVaR (Range Value at Risk) ja ES (Expected Shortfall), joista VaR ja ES molemmat esiintyvät nykyisissä rahoitussäännöksissä riskimittoina. VaR ja RVaR ovat rahoitusriskimittoja, mutteivät koherentteja riskimittoja. ES puolestaan on koherentti riskimitta.

2.1.1 Riskimittojen esittely

Tässä kappaleessa esitellään joitakin tämän työn kannalta tärkeitä riskimittoja. Ensimmäinen on Value at Risk eli VaR, joka määritellään satunnaismuuttujan (yleistettynä) $100(1-\alpha)\%$ kvantiilina eli sinä lukuarvona, jota pienempiä satunnaismuuttujan arvot ovat todennäköisyydellä $1-\alpha$.

Määritelmä 2.5. Satunnaismuuttujan $X \in \chi$ riskitasolla $\alpha \in [0,1]$ *Value-at-Risk* (VaR) on:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in [-\infty, \infty] : \mathbb{P}(X \leq x) \geq 1-\alpha\}$$

Mitta VaR kuvaa siis selvästikin sellaista riskin suuruutta, jota suuremmat riskit toteutuvat todennäköisyydellä α. Riskimitta VaR_α, $\alpha \geq 0$ täyttää riskimitalta toivotuista ehdoista ehdot (a)-(c) ja (e) ja siten se on rahoitusriskimitta, muttei koherentti riskimitta [1].

Toinen esiteltävä riskimitta on Range Value at Risk eli RVaR. RVaR riskitasolla $(\alpha, \beta) \in [0,1] \times [0,1]$ on riskitasojen α ja $\alpha + \beta$ välisen VaR-mitan riskitasolla β keskiarvotettu riski, kun $\beta > 0$ ja tilanteessa $\beta = 0$ se korvataan luonnollisesti kyseisen tason α VaR-mitalla. Täsmällinen määritelmä on seuraava.

Määritelmä 2.6. Kaikille satunnaismuuttujille $X \in \chi$ *Range-Value-at-Risk* ($RVaR$) tasolla $(\alpha, \beta) \in [0,1] \times [0,1]$ on

$$RVaR_{\alpha,\beta}(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\beta} VaR_\gamma(X)\, d\gamma & \text{jos } \beta > 0 \\ VaR_\alpha(X) & \text{jos } \beta = 0 \end{cases}$$

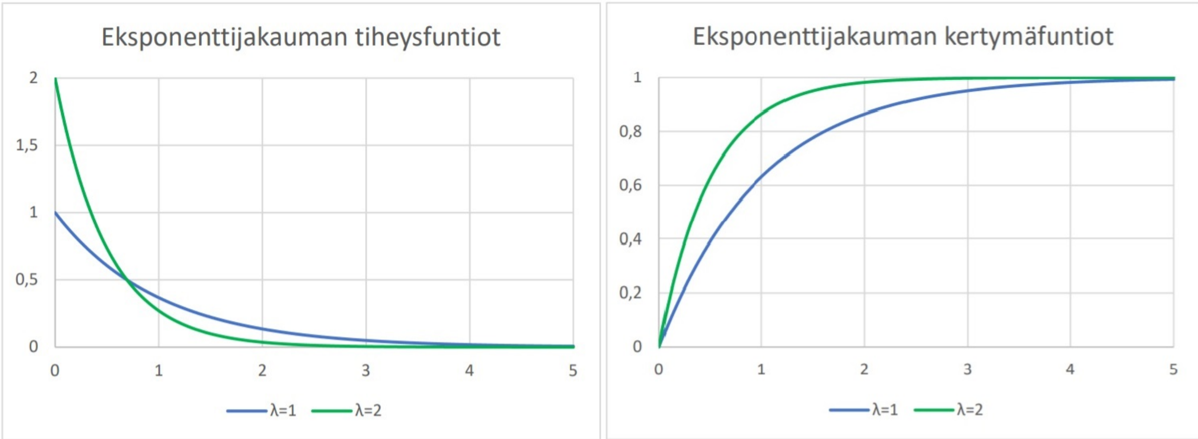
Riskimitan $VaR_\alpha(X)$ ominaisuuksista seuraa selvästi, että riskimitta $RVaR_{\alpha,\beta}(X)$ täyttää myös samat riskimittojen toivotut ominaisuudet. Täten $RVaR_{\alpha,\beta}(X)$ on myös rahoitusriskimitta, muttei koherentti riskimitta. Riskimitta $VaR_\alpha(X)$ voidaan ajatella riskimitan $RVaR_{\alpha,\beta}(X)$ erikoistapaukseksi, kun $\beta = 0$. Toinen riskimitan $RVaR_{\alpha,\beta}(X)$ erikoistapaus on tilanne, kun $\alpha = 0$. Tällä tavalla muodostettua riskimittaa kutsutaan Expected Shortfalliksi (ES) tai keskimääräiseksi VaRiksi (Average Value at Risk, AVaR). Tässä työssä käytämme ensimmäistä nimeä eli ES.

Määritelmä 2.7. Kaikille satunnaismuuttujille $X \in \chi$ *Expeted Shortfall* (ES) tasolla $\beta \in [0,1]$ on:

$$ES_\beta(X) = RVaR_{0,\beta}(X) = \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\beta VaR_\gamma(X)\, d\gamma$$

Vastaavalla tavalla kuin RVaR keskiarvottaa VaRia riskitasojen välillä, niin ES keskiarvottaa VaRia tiettyyn todennäköisyysmassaan saakka. VaRista ja RVaRista poiketen ES ei ole pelkästään rahoitusriskimitta vaan myös koherentti riskimitta. Tämän todistus löytyy Föllmer ja Schiedin kappaleesta 4.4 lähteestä [2].

Esimerkki 2.2. Olkoon X eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja parametrilla λ. Toisin sanoen $X \sim Exp(\lambda)$. Tällöin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ja sen kertymäfunktio on: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ sekä odotusarvo $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ ja varianssi $Var[X] = 1/\lambda^2$. Alla kuvassa 2.1 on esitetty graafisesti eksponenttijakauman tiheys- ja kertymäfunktiot parametrin λ arvoilla 1 ja 2.



Kuva 2.1: Eksponenttijakauman tiheys- ja kertymäfunktiot parametrin λ arvoilla 1 ja 2.

VaR-mitan määritelmän 2.5 ja eksponenttifunktion kertymäfunktion avulla saadaan eksponenttijakautuneelle satunnaismuuttujalle X VaR-mitta määritettyä:

$$VaR_\alpha(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha) \tag{2.1}$$

RVaR-mitta taas saadaan satunnaismuuttujalle X määritelmän 2.6 mukaisesti integroimalla VaR-mittaa:

$$\begin{aligned} RVaR_{\alpha,\beta}(X) &= \frac{1}{\beta}\int_\alpha^{\alpha+\beta} VaR_\gamma(X)\,d\gamma \\ &= \frac{1}{\beta}\int_\alpha^{\alpha+\beta} -\frac{1}{\lambda}\ln(\gamma)\,d\gamma \\ &= \frac{\alpha}{\beta\lambda}\ln(\alpha) - \frac{\alpha+\beta}{\beta\lambda}\ln(\alpha+\beta) + \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ES-mitta saadaan määritelmän 2.7 mukaisesti integroitua seuraavasti tai vaihtoehtoisesti sijoittamalla $\alpha = 0$ RVaR-mitan kaavaan.

$$
\begin{aligned}
ES_\beta(X) &= \frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta VaR_\gamma(X)\,d\gamma \\
&= \frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta -\frac{1}{\lambda}\ln(\gamma)\,d\gamma \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\ln(\beta)
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Sijoittamalla eri parametrien λ, α ja β arvoja kaavoihin (2.1), (2.2) ja (2.3), voidaan laskea eksponenttijakautuneelle satunnaismuuttujalle riskimittojen arvoja. Seuraavassa taulukossa kuvassa 2.2 on esitetty riskimittojen arvoja eri parametreilla λ, α ja β.

Parametri λ	Riskitaso (α) [%]	Riskitaso (β) [%]	E[X]	Var(X)	$VaR_\alpha(X)$	$RVaR_{\alpha,\beta}(X)$	$ES_\beta(X)$
1	5	5	1	1	2,996	2,609	3,996
2	5	5	2	4	1,498	2,805	1,998
1	2,5	5	1	1	3,689	3,041	3,996
1	5	2,5	1	1	2,996	2,779	4,689

Kuva 2.2: Riskimittojen arvoja eri parametrien arvoilla

Parametria muuttamalla muutetaan itse satunnaismuuttujan jakaumaa, kun taas parametreja α ja β muuttamalla muutetaan riskimittojen VaR, RVaR ja ES laskennassa käytettäviä integrointivälejä. Täten on selvää, että satunnaismuuttujan jakaumaan liittyviin ominaisuuksiin eli odotusarvoon ja varianssiin vaikuttaa ainoastaan parametrin λ muuttaminen; sen kasvattaminen arvosta yksi arvoon kaksi kasvattaa sekä odotusarvoa että varianssia. Parametrin λ kasvattaminen kasvattaa myös RVaR-mittaa, mutta pienenetää sekä VaR- että ES-mittoja kuten kuvan 2.2 taulukosta voidaan havaita. Riskitasoparametria α käytetään mittojen VaR ja RVaR määrittämisessä, joten kyseisen parametrin muuttaminen vaikuttaa siten vain näihin mittoihin. Riskotasoparametrin α pienentäminen kasvattaa molempien riskimittojen VaR ja RVaR arvoja. Riskotasoparametria β taas käyetään riskimittojen RVaR ja ES määrittämiseen, joten sen muuttaminen vaikuuttaa ainoastaan näiden riskimittojen arvoihin. Parametrin β pienentäminen kasvattaa molempien näiden mittojen arvoja. On luonnollista, että riskimittojen arvot kasvavat parametrejä pienennettäessä, sillä riskimitan suurempi arvo kuvastaa suurempaa riskiä.

2.1.2 RVaR-mitan ominaisuuksia

Tässä kappaleessa esitellään joitakin RVaR-mitan hyödyllisiä ominaisuuksia.

Embrechts ym [1] mukaan $RVaR_{\alpha,\beta}$ on jatkuva, kun $\alpha > 0$ ja $\alpha + \beta < 1$. Tämä voidaan selvästi havaita ainakin jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan tapauksessa suoraan määritelmästä. Samoin voidaan nähdä, että erityisesti, kun β lähestyy nollaa, niin $RVaR_{\alpha,\beta}$ on jatkuva samoin kuin tilanne, jossa β lähestyy $1-\alpha$.

Kuten kappaleesssa 2.1.1 esitettiin RVaR-mitta ei toteuta subaddittiivisuutta eikä siten ole koherentti riskimitta. Seuraavassa lauseessa esitetään kuitenkin RVaR-mitan erityinen subadditiivinen ominaisuus, joka yhdistää yksittäiset RVaR-mitat ja eräänlaisen yhdistetyn RVaR-mitan.

Lause 2.1. Kaikille riskitasoparametreille $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n > 0$ ja satunnaismuuttujille $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$ pätee:

$$RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i, \bigvee_{i=1}^n \beta_i}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \sum_{i=1}^n RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i)$$

Näytetään seuraavaksi, että lause 2.1 on tosi kun $n = 2$. Muilla arvoilla voidaan päätellä lauseen pätevän induktion nojalla. Todistus seuraa Embrechts ym artikkelin [1] todistusta kappaleessa 3 (Theorem 1).

Todistus. Olkoon X_1 ja $X_2 \in \mathcal{X}$ ja $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Todistus on jaettu kolmeen osaan riskitasoparametrien eri arvoilla.

1. Oletetaan, että $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 \vee \beta_2 < 1$. Olkoon lisäksi joukot $A_1 = \{U_{X_1} \geq 1 - \alpha_1\}$ ja $A_2 = \{U_{X_2} \geq 1 - \alpha_2\}$. Tällöin:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Olkoon $Y_1 = \mathbb{1}_{A_1^c} X_1 - m\,\mathbb{1}_{A_1}$ ja $Y_2 = \mathbb{1}_{A_2^c} X_1 - m\,\mathbb{1}_{A_2}$, missä $m \in \mathbb{R}$ siten, että $m > -\min\{VaR_{\alpha_1+\beta_1}(X_1), VaR_{\alpha_2+\beta_2}(X_2)\}$. ES-mitan määritelmän nojalla voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} ES_{\beta_1}(Y_1) &= \frac{1}{\beta_1}\int_0^{\beta_1} VaR_\gamma(Y_1)\,d\gamma \\ &= \frac{1}{\beta_1}\int_0^{\beta_1} VaR_\gamma(X_1\,\mathbb{1}_{A_1^c} - m\,\mathbb{1}_{A_1})\,d\gamma \end{aligned}$$

Embrechts yms artikkelin [1] todistuksen mukaan tästä seuraa, että:

$$ES_{\beta_1}(Y_1) = RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1) = \frac{1}{\beta_1}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_1+\beta_1} VaR_\gamma(X_1)\,d\gamma$$

ja vastaavasti

$$RVaR_{\alpha_2,\beta_2}(X_2) = ES_{\beta_2}(Y_2)$$

Täten ES:n subadditiivisuuden, ja sen ei-kasvavuuden, kun $\beta \geq 0$, johdosta seuraa, että:

$$RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1)+RVaR_{\alpha_2,\beta_2}(X_2) = ES_{\beta_1}(Y_1)+ES_{\beta_2}(Y_2) \geq ES_{\beta_1\vee\beta_2}(Y_1+Y_2) \tag{2.4}$$

Näytetään seuraavaksi aputuloksena, että kun $\gamma \in [0,1]$:

$$VaR_\gamma(Y_1+Y_2) \geq VaR_{\gamma+\alpha_1+\alpha_2}(X_1+X_2) \tag{2.5}$$

Jos $\gamma + \alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$, niin

$$VaR_\gamma(Y_1+Y_2) \geq VaR_{\gamma+\alpha_1+\alpha_2}(X_1+X_2) \overset{M.2.5}{=} -\infty$$

jos taas $\gamma + \alpha_1 + \alpha_2 < 1$, niin

$$\begin{aligned}(Y_1+Y_2)\,\mathbb{1}_{A_1^c\cap A_2^c} &= (X_1\,\mathbb{1}_{A_1^c} - m\,\mathbb{1}_{A_1} + X_2\,\mathbb{1}_{A_2^c} - m\,\mathbb{1}_{A_2})\,\mathbb{1}_{A_1^c\cap A_2^c}\\ &= X_1\,\mathbb{1}_{A_1^c\cap A_2^c} + X_2\,\mathbb{1}_{A_1^c\cap A_2^c}\\ &= (X_1+X_2)\,\mathbb{1}_{A_1^c\cap A_2^c}\end{aligned}$$

ja siten kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\mathbb{P}(Y_1+Y_2 \geq x) \geq \mathbb{P}(X_1+X_2 \geq x \mid A_1^c \cap A_2^c) \geq \mathbb{P}(X_1+X_2 \geq x) - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$$

joten:

$$VaR_\gamma(Y_1+Y_2) \geq VaR_{\gamma+\mathbb{P}(A_1\cup A_2)}(X_1+X_2) \geq VaR_{\gamma+\alpha_1+\alpha_2}(X_1+X_2)$$

Näin ollen aputulos (2.5) on tosi.

i Oletetaan, että $\beta_1 \vee \beta_2 > 0$. Tällöin

$$RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1) + RVaR_{\alpha_2,\beta_2}(X_2) \overset{(2.4)}{\geq} ES_{\beta_1 \vee \beta_2}(Y_1 + Y_2)$$

joka on ES-mitan määritelmän 2.7 nojalla:

$$\begin{aligned} ES_{\beta_1 \vee \beta_2}(Y_1 + Y_2) &= \frac{1}{\beta_1 \vee \beta_2} \int\limits_0^{\beta_1 \vee \beta_2} VaR_\gamma(Y_1 + Y_2)\, d\gamma \\ &\overset{(2.5)}{\geq} \frac{1}{\beta_1 \vee \beta_2} \int\limits_0^{\beta_1 \vee \beta_2} VaR_{\gamma+(\alpha_1+\alpha_2)}(X_1 + X_2)\, d\gamma \end{aligned}$$

josta taas RVaR-mitan määritelmän 2.6 nojalla saadaan

$$\frac{1}{\beta_1 \vee \beta_2} \int\limits_0^{\beta_1 \vee \beta_2} VaR_{\gamma+(\alpha_1+\alpha_2)}(X_1 + X_2)\, d\gamma = RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1 \vee \beta_2}(X_1 + X_2).$$

Kun $\beta_1 \vee \beta_2 > 0$ pätee siis

$$RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1) + RVaR_{\alpha_2,\beta_2}(X_2) \leq RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1 \vee \beta_2}(X_1 + X_2). \tag{2.6}$$

ii Oletetaan sitten, että $\beta_1 \vee \beta_2 = 0$ eli $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Kun β lähestyy nollaa, RVaR-mitan jatkuvuuden nojalla voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} RVaR_{\alpha_1,0}(X_1) + RVaR_{\alpha_2,0}(X_2) &\overset{jva}{=} \lim_{\beta \to 0+} \left(RVaR_{\alpha_1,\beta}(X_1) + RVaR_{\alpha_1,\beta}(X_2) \right) \\ &\overset{(2.6)}{\geq} \lim_{\beta \to 0+} RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,\beta}(X_1 + X_2) \\ &= RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,0}(X_1 + X_2) \end{aligned}$$

Kun $\beta_1 \vee \beta_2 \geq 0$, niin kohdista i ja ii seuraa, että:

$$RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1) + RVaR_{\alpha_2,\beta_2}(X_2) \geq RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1 \vee \beta_2}(X_1 + X_2) \tag{2.7}$$

2. Oletetaan, että $\alpha_1+\alpha_2 < 1$ ja että $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1\vee\beta_2 = 1$. Oletetaan nyt, että $\beta_2 > \beta_1$. Tällöin:

$$\begin{aligned} RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1) + RVaR_{\alpha_2,\beta_2}(X_2) &\overset{jva}{=} RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1) + \lim_{\beta\to\beta_2} RVaR_{\alpha_1,\beta}(X_2) \\ &= \lim_{\beta\to\beta_2} (RVaR_{\alpha_1,\beta_1}(X_1) + RVaR_{\alpha_1,\beta}(X_2)) \\ &\overset{(2.7)}{\geq} \lim_{\beta\to\beta_2} RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1\vee\beta}(X_1+X_2) \\ &= RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1\vee\beta_2}(X_1+X_2) \end{aligned}$$

Toinen suunta eli $\beta_1 > \beta_2$ menee täysin samalla tavalla. Jos taas $\beta_1 = \beta_2$, niin tällöin korvataan molemmat β_1 ja β_2 muuttujalla β heti ensimmäisessä yhtälössä ja todistus etenee jälleen samalla tavalla.

3. Oletetaan vielä loput tapaukset eli, että $\alpha_1+\alpha_2 \geq 1$ tai $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1\vee\beta_2 > 1$. Tällöin

$$RVaR_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1\vee\beta_2}(X_1+X_2) = -\infty$$

ja väite on triviaalisti tosi.

Nyt kohdista 1-3 seuraa, että lause 2.1 on tosi, kun $n = 2$. □

Vaikka siis riskimitta RVaR ei ole subadditiivinen, lause 2.1 osoittaa, että on mahdollistaa yhdistää sopivasti riskitat summatusta riskistä, ja tämän ylärajaksi osoittautuu erillisten riskimittojen summa. Tämän tuloksen avulla voidaan arvioida tällä tavalla yhdistettyjä riskejä erillisten riskien summan avulla samaan tapaan kuin subadditiivisuusominaisuuden avulla voitaisiin yleisemminkin.

2.2 Markkinat

Kaiken tarkastelun taustalla oletetaan olevan kappaleessa 2.1 kuvattu todennäköisyysavaruus. Tämän työn tarkastelussa keskitytään sellaisiin markkinoihin, joilla on n kappaletta toimijoita ja joiden kokonaisriski on X. Markkinoiden toimijat voisivat käytännössä olla esimerkiksi vakuutusyhtiöitä tai sijoittajia. Kokonaisriski esimerkiksi vakuutusyhtiöiden tapauksessa kuvastaa tulevien korvausten suuruutta tai sijoittajalla mahdollisten tappioiden suurutta.

Toimijan $i \in \{1,\ldots,n\}$ riski alussa on satunnaismuuttuja $\xi_i \in \mathcal{X}$, jossa joukko $\mathcal{X}$ on kappaleen 2.1 mukainen integroituvien satunnaismuuttujien joukko. Markkinoiden riski uudelleenjaetaan toimijoiden kesken ja tämän jälkeen toimijan i riski on X_i. Molempien tapausten riskien on summauduttava markkinoiden kokonaisriskiksi X, sillä kokonaisriski markkinoilla ei voi riskiä jaettaessa muuttua. Matemaattisin merkinnöin tämä voidaan kirjoittaa niin kutsuttuna markkinoiden *clearing-ehtona*:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i = X = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2.8}$$

Kokonaisriski X on mahdollista jakaa toimijoiden kesken monella tavalla. Olkoon $\mathbb{A}_n(X)$ kokonaisriskin X sallittujen allokaatioiden joukko n:lle toimijalle eli:

$$\mathbb{A}_n(X) = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^{n} X_i = X \right\}$$

Tässä tarkastelussa katsotaan satunnaismuuttujien X, X_i ja ξ_i positiivisten arvojen olevan tappioita. Tämä on luonnollista esimerkiksi tilanteessa, jossa satunnaimuuttujat ovat vahinkojen suuruksia, joita vakuutusyhtiön tulee vakuutetulle korvata.

Toimijoiden oletetaan mittaavan riskiä RVaR-mitalla ja jokainen toimija on varustettu omalla riskitasollaan ja siten riskimitallaan ρ_i. Tarkastelemme sellaista tilannetta, jossa toimijan i riskitaso on: $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}_+^2$ ja siten toimijoiden i riskimitat ovat: $\rho_i = RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i)$.

Tarkastelun alussa toimijan $i \in \{1, \ldots, n\}$ riski on siis $\xi_i \in \mathcal{X}$.

Toimijoiden riskitasojen (α_i, β_i) oletetaan täyttävän seuraavat ehdot:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \text{ ja } \beta = \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i \text{ siten, että } \alpha + \beta < 1.$$

Toimijat voidaan yleistettävyyden kärsimättä järjestää siten, että $\beta_n = \beta$. Tämä tarkoittaa siis sitä, että toimijaksi n valitaan se toimija i, jonka riskitasoparametri β_i on toimijoista suurin. Merkinnän tarkoituksena on hieman yksinkertaistaa todistusten ja lauseiden merkintöjä.

Lisäksi oletetaan, että kokonaisriskille X pätee:

$$\mathbb{P}(X > 0) \leq \max\{\alpha^* + \beta, \alpha\} \text{ , missä } \alpha^* = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

2.3 Tasapainoallokaatio

Taustalla olevat markkinat on kuvattu kappaleessa 2.2. Keskitytään tilanteeseen, jossa toimijat haluavat uudelleenjakaa markkinoiden kokonaisriskin. Tasapainoteoreettisessa tarkastelussa riskinjakaminen nähdään kilpailullisten toimijoiden keskuudessa tapahtuvana riskin jakamisena eli esimerkiksi eri vakuutusyhtiöiden keskenäisenä riskin uudelleenjakona, jossa jokainen yhtiö pyrkii minimoimaan omaa tulevien korvausten määrää.

Tarkastelun alussa toimijoilla $i = \{1, \dots, n\}$ on riski ξ_i ja riskin uudelleenjaon jälkeen riski on X_i. Selvästi molemmat riskinjaot ovat sallittuja allokaatioita ja siten $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathbb{A}_n(X)$ ja $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathbb{A}_n(X)$.

Markkinoiden riski voidaan muuttaa rahalliseksi summaksi hinnoittelijan avulla. Määritellään seuraavaksi täsmällisesti hinnoittelija kuten Nyrhinen [3] kappalessa 5.1.

Määritelmä 2.8. Olkoon Ψ joukko rajoitettuja, ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Satunnaismuuttujaa $\psi \in \Psi$ kutsutaan *hinnoittelijaksi* jos toimijan ottaessa riskin Y, hänen maksettavakseen tulee määrä $\mathbb{E}[\psi Y]$.

Embrechts ym [1] mukaan määritelmän 2.8 mukainen ψ on mikroekonomisten markkinoiden hinnoittelija toimijoiden keskuudessa. Riskin uudelleenjaossa jokainen toimija $i = \{1, \dots, n\}$ joutuu maksamaan markkinoiden hinnoittelijan ψ määritelmän 2.8 mukaisesti maksun $\mathbb{E}[\psi(X_i - \xi_i)]$, kun hän vaihtaa alkuperäisen riskinsä ξ_i uuteen riskiin X_i. Tämän seurauksena annetulla hinnoittelijalla ψ toimijan i tavoitteena on minimoida riskinvaihdossa riskinmääränsä ehdolla $0 \leq X_i \leq X$:

$$\min\{RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i - \mathbb{E}[\psi(X_i - \xi_i)]) \in [-\infty, \infty] : 0 \leq X_i \leq X\} \tag{2.9}$$

Optimoinnin 2.9 rajoitteena on oltava lisäksi $0 \leq X_i \leq X$, mikä tarkoittaa sitä, ettei toimijan riski voi olla negatiivinen tai suurempi kuin kokonaisriski. Käyttämällä odotusarvon linearisuutta ja mitan $RVaR_{\alpha,\beta}$ kassainvaranssiominaisuutta lauseke 2.9 voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\min\{RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) - \mathbb{E}[\psi X_i] + \mathbb{E}[\psi \xi_i] \in [-\infty, \infty] : 0 \leq X_i \leq X\} \tag{2.10}$$

Oikeastaan lauseketta 2.10 minimoitaessa itse lausekkeen minimiarvon sijasta kiinnostavampi asia on sen minimipiste muuttujan X_i suhteen, ja sen kannalta ξ_i on yhdentekevä. Täten optimoitaessa lauseketta joukossa $X_i \in \chi$ ehdolla $0 \leq X_i \leq X$ päädytään muotoon:

$$\min\{RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) - \mathbb{E}[\psi X_i] \in [-\infty, \infty] : 0 \leq X_i \leq X\} \tag{2.11}$$

Optimoinnin kannalta ehto $0 \leq X_i \leq X$ on hyvin olennainen, eikä se ole myöskään lausekkeen tai tuloksen tulkinnan kannalta rajoittava, sillä riskiä jaettaessa toimijoiden kesken on luonnollista, että jokaisen toimijan riski on ei-negatiivinen ja toisaalta korkeintaan kokonaisriski - toisin sanoen jokainen toimija ottaa tappioriskin, muttei suurempaa riskiä kuin markkinoiden kokonaisriski. Negatiivinen riski tarkoittaisi sitä, että toimija odottaisi maksun sijaan saavansa rahaa. Tämä ei ole kovin luonnollinen ajatus esimerkiksi vakuutusyhtiön määrittäessä tulevien korvausmaksujen riskiä. Mikäli satunnaismuuttujalle X_i sallittaisiin negatiiviset arvot, lausekkeen 2.11 infimum olisi aina joko 0 tai $-\infty$, eikä epätriviaalia tasapainoa olisi Embrechts ym [1] kappaleen 5.1 mukaan olemassa. Tarkastelun kannalta kiinnostavaa on juuri löytää epätriviaali tasapaino riskinjaossa.

Lauseke 2.11 sisältää tietoa toimijan halukkuudesta ottaa riskiä riskimitan muodossa sekä markkinoista, joilla toimijat operoivat hinnoittelijan, reunaehdon ja optimoinnin kautta. Tästä syystä lauseke 2.11 on erityisen tärkeä käsiteltävää ongelmaa tarkasteltaessa. Lausekkeessa siis yhdistyy markkinoiden kuvaus ja toimijan riskinottohalukkuus. Merkitään lausekkeen (2.11) minimoitavaa mittaa $\mathcal{V}_i(X_i)$:llä, kun hinnoittelija on kiinnitetty, eli:

$$\mathcal{V}_i(X_i) = RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) - \mathbb{E}[\psi X_i] \tag{2.12}$$

Seuraava askel on siten muotoilla tasapainon määritelmä ja tässäkin nojaudutaan Embrechts ym artikkelin [1] määritelmään 3, jossa on määritelty Arrow-Debrew tasapaino.

Määritelmä 2.9. *Arrow-Debrew-tasapaino* on pari $(\psi, (X_1^*, \dots, X_n^*)) \in \Psi \times \mathbb{A}_n(X)$ mikäli kaikilla $i = 1, \dots, n$ pätee:

$$X_i^* \in \operatorname{argmin}\{\mathcal{V}_i(X_i) : X_i \in \mathcal{X}, 0 \leq X_i \leq X\},$$

Arrow-Debrew-tasapainossa mainittua hinnoittelijaa kutsutaan *tasapainohinnoittelijaksi* ja allokaatiota $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ *tasapainoallokaatioksi.*

2.4 Pareto-optimaalinen allokaatio

Kappaleessa 2.3 käsiteltiin sellaista riskinjaon tasapainoa, jossa toimijat uudelleenallokoivat riskin kilpailullisilla markkinoilla. Toinen tapa toteuttaa riskin uudelleenjakamista olisi toimijoiden yhteistyö. Yhteistyö voisi käynnön tilanteessa olla esimerkiksi sellainen Embrechts ym [1] kuvaama tilanne, jossa saman konsernin eri maissa toimivat tytäryhtiöt ottavat jakaakseen osansa riskistä. Eri maissa sääntelypääomien vaatimukset voivat poiketa toisistaan ja tällöin yhtiö voi pyrkiä minimoimaan pääoman tarvetta riskinjaon kautta. Yhteistyössä toteutettua riskin uudelleenjakamista voidaan käsitellä Pareto-optimaalisuuden kautta. Pareto-optimaalisuus viittaa sellaiseen optimaaliseen tilanteeseen, jossa yksikään ei voi parantaa valintaansa ilman, että jonkun toisen valinnan olisi heikennyttävä. Tämän työn yhteydessä pareto-optimaalinen allokaatio tarkoittaa siis sellaista allokaatiota, jossa yhdenkään toimijan riskiä ei voida pienentää suurentamatta samalla jonkun toisen toimijan riskiä. Matemaattisessa muodossa sama voidaan kirjoittaa seuraavana määritelmänä.

Määritelmä 2.10. Olkoot $\rho_1, \ldots, \rho_n$ jotkin riskimittarit ja $X \in \mathcal{X}$ satunnaismuuttuja. Tällöin $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{A}_n(X)$ on X:n *Pareto-optimaalinen allokaatio*, jos sellaisella $(Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{A}_n(X)$, joka toteuttaa $\rho_i(Y_i) \leq \rho_i(X_i)$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee:

$$\rho_i(Y_i) = \rho_i(X_i)$$

Merkitään seuraavaksi Embrecht ym [1] artikkelin mukaisesti n:n yleisen riskimitan inf-konvoluutio, joka ilmaisee kaikkien mahdollisten allokaatioiden yhdistettyjen riskimittojen infimumin, kun $X \in \mathcal{X}$:

Määritelmä 2.11. Riskimittojen $\rho_i(X)$ inf.konvoluutio on:

$$\mathop{\square}_{i=1}^{n} \rho_i(X) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \rho_i(X_i) : (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{A}_n(X) \right\}$$

Seuraavaksi esitetään RVaR-mittojen inf-konvoluutio ja optimaalinen allokaatio.

Lause 2.2. Kaikille $X \in \mathcal{X}$ ja parametreille $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \geq 0$ pätee:

$$\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X) = RVaR_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i}(X) \tag{2.13}$$

Lisäksi jos $p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i < 1$ ja merkitsemällä $\beta_n = \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i$, eräs satunaismuuttujan X optimaalinen allokaatio $(X_1, \ldots, X_n)$ voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} X_i &= (X - m)\, \mathbb{1}_{1-\sum_{k=1}^{i} \alpha_k < U_X \leq 1-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k}, \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ X_n &= (X - m)\, \mathbb{1}_{U_X \leq 1-\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k} + m \end{aligned} \tag{2.14}$$

Todistetaan lause jälleen seuraamalla Embrechts ym [1] artikkelin todistusta.

Todistus. Aloitetaan näyttämällä, että annettu allokaatio yhtälöissä (2.14) on todella allokaatio eli se toteuttaa clearing-ehdon eli että:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = (X - m)\, \mathbb{1}_{\{U_X \leq 1-\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\}} + m + \sum_{i=1}^{n-1} (X - m)\, \mathbb{1}_{\{1-\sum_{k=1}^{i} \alpha_k < U_X < 1-\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k\}} = X$$

Tarkastellaan indikaattorifunktioiden välejä:

$$
\begin{aligned}
i = 1 :& 1 - \alpha_1 < U_X < 1 \\
i = 2 :& 1 - \alpha_1 - \alpha_2 < U_X < 1 - \alpha_1 \\
&\vdots \\
i = n - 1 :& 1 -_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1} < U_X < 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-2} \\
i = n :& U_X < 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1}
\end{aligned}
$$

Tästä huomataan selvästi, että joukot ovat erillisiä ja kattavat koko välin $[0, 1]$, missä U_X on tasajakautunut. Täten voidaan kirjoittaa:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} X_i &= (X - m)\, \mathbb{1}_{\{U_X \leq 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\}} + m + \sum_{i=1}^{n-1} (X - m)\, \mathbb{1}_{\{1 - \sum_{k=1}^{i} \alpha_k < U_X < 1 - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k\}} \\
&= (X - m)\, \mathbb{1}_{\{0 \leq U_X \leq 1\}} + m \\
&= X - m + m = X
\end{aligned}
$$

Nyt on siis näytetty, että annettu allokaatio (2.14) toteuttaa clearing-ehdon (2.8) ja on siten sallittu allokaatio. Lisäksi huomataan, että indikaattorifunktioiden välien ja RVaRien integrointivälien erisuuruuksien seurauksena kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ pätee: $RVaR_{\alpha_i, \beta_i(X_i)} \leq 0$.

Seuraavaksi näytetään, että yhdistetty RVaR-mitta on tosiaan inf-konvoluutio kuten yhtälö (2.13) esittää.

1. Todistetaan ensin suunta:

$$
RVaR_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta_n}(X) \leq \mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i, \beta_i}(X)
$$

Olkoon $(X_1', \ldots, X_n') \in \mathbb{A}_n(X)$ inf-konvoluutioallokaatio, tällöin

$$
\begin{aligned}
\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i, \beta_i}(X) &= \sum_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i, \beta_i}(X_i') \\
&\overset{L.2.1}{\geq} RVaR_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta_n}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i'\Big) \\
&= RVaR_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta_n}(X)
\end{aligned}
$$

2. Osoitetaan sitten vielä toinen suunta:

$$
\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i, \beta_i}(X) \leq RVaR_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta_n}(X) \tag{2.15}
$$

i Tarkastellaan tilannetta $p < 1$.

Olkoon $m \leq VaR_p(X)$. Ensinnäkin RVaR-mitan määritelmän 2.6 nojalla kirjoittaen X_n auki saadaan, kun $U_X \leq 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$:

$$
\begin{aligned}
RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) &= \frac{1}{\beta_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\beta_n} VaR_\gamma(X_n)\, d\gamma \\
&= \frac{1}{\beta_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\beta_n} VaR_\gamma((X-m)\, \mathbb{1}_{\{U_X \leq 1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\}} + m)\, d\gamma
\end{aligned}
$$

Integrointivälillä selvästi indikaattorifunktio on 1, joten VaR-mitan argumentiksi jää ainoastaan X. Lisäksi jos $U_X \geq 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$, niin $X = 0$ ja täten integrointivälillä on merkitystä vain juuri välissä α_n:stä $\alpha_n + \beta_n$:ään.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\beta_n} VaR_\gamma(X)\, d\gamma &= \frac{1}{\beta_n} \int_{\sum_{i=1}^n \alpha_i}^{\sum_{i=1}^n \alpha_i+\beta_n} VaR_\gamma(X)\, d\gamma \\
&= RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta_n}(X)
\end{aligned}
$$

Mikäli $U_X > 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$, niin $RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) = 0$ ja $U_X \in]1 - \sum_{k=1}^{i} \alpha_k, 1 - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k]$ jollain i=j. Täten, kun $U_X \in]1 - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k, 1 - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k]$:

$$
\begin{aligned}
RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta_n}(X) &= \frac{1}{\beta_n} \int_{\sum_{i=1}^n \alpha_i}^{\sum_{i=1}^n \alpha_i+\beta_n} VaR_\gamma(X)\, d\gamma \\
&= \frac{1}{\beta_n} \int_{\sum_{i=1}^n \alpha_i}^{\sum_{i=1}^n \alpha_i+\beta_n} VaR_\gamma(X_j + X_n)\, d\gamma
\end{aligned}
$$

Koska $U_X \in]1 - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k, 1 - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k]$, niin allokaation (2.14) mukaisesti saadaan: $X_j + X_n = X - m + m$, sillä X_j:n lausekkeen indikaattori on 1 ja X_n:n lausekkeen indikaattori on 0. Täten $RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta_n}(X)$ saadaan muotoon:

$$RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta_n}(X) = \frac{1}{\beta_n} \int\limits_{\sum_{i=1}^n \alpha_i}^{\sum_{i=1}^n \alpha_i+\beta_n} VaR_\gamma(X - m + m)\,d\gamma$$
$$= \frac{1}{\beta_n} \int\limits_{\sum_{i=1}^n \alpha_i}^{\sum_{i=1}^n \alpha_i+\beta_n} VaR_\gamma(X)\,d\gamma$$
$$= 0$$

Siis:

$$RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) = RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta_n}(X)$$

Täten:

$$\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X) \overset{M.2.11}{\leq} \sum_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i)$$
$$\leq RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n)$$
$$= RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta_n}(X)$$

Siispä (2.15) on tosi.

ii Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta $p > 1$.
Mikäli $\alpha_n + \beta_n > 1$, niin epäyhtälö (2.15) on triviaalisti tosi, sillä:
$\sum_{i=1}^n RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) = -\infty$
Jos taas $\alpha_n + \beta_n \leq 1$, niin Embrechts ym [1] lauseen 2 todistuksen mukaan:

$$RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) = \frac{1}{\beta_n} \int\limits_{\alpha_n}^{\alpha_n+\beta_n} VaR_\gamma(X_n)\,d\gamma$$
$$\leq \frac{1}{\alpha_n+\beta_n} \int\limits_{0}^{\alpha_n+\beta_n} VaR_\gamma(X_n)\,d\gamma$$
$$= ES_{\alpha_n+\beta_n}(X_n)$$

Lausekkeen (2.14) X_n voidaan kirjoittaa myös muodossa:

$$X_n = X\,\mathbb{1}_{U_X \leq 1-\sum_{k=1}^{n-1}} + m\,\mathbb{1}_{U_X > 1-\sum_{k=1}^{n-1}}$$

Lisäksi kappaleessa 2.1.1 ES-mitan todettiin olevan koherentti, joten se on myös subadditiivinen. Hydynnetään näitä kahta seikkaa seuraavaksi:

$$\begin{aligned}
RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) &= ES_{\alpha_n+\beta_n}\left(X\,\mathbb{1}_{U_X\leq 1-\sum_{k=1}^{n-1}} + m\,\mathbb{1}_{U_X>1-\sum_{k=1}^{n-1}}\right) \\
&\leq ES_{\alpha_n+\beta_n}\left(X\,\mathbb{1}_{U_X\leq 1-\sum_{k=1}^{n-1}}\right) + ES_{\alpha_n+\beta_n}\left(m\,\mathbb{1}_{U_X>1-\sum_{k=1}^{n-1}}\right) \\
&= \begin{cases} \mathrm{ES}_{\alpha_n+\beta_n}\left(X\,\mathbb{1}_{U_X\leq 1-\sum_{k=1}^{n-1}}\right) + m\dfrac{p-1}{\alpha_n+\beta_n} & \text{, jos } \sum_{k=1}^{n-1} < 1 \\ \mathrm{m} & \text{, jos } \sum_{k=1}^{n-1} \geq 1 \end{cases} \\
&\to -\infty \text{ , kun } m \to -\infty
\end{aligned}$$

Täten $\square_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) = -\infty$ ja siten epäyhtälö (2.15) on tosi.

iii Tarkastelaan tilannetta, jossa $p = 1$ ja $\beta_n = 0$
Nythän, koska $p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, niin $1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \alpha_n$. Täten $\mathbb{P}(X_n > m) \leq \alpha_n$ ja VaR-mitan määritelmän 2.5 nojalla : $VaR_{\alpha_n}(X_n) \leq m$, joten $VaR_{\alpha_n}(X_n) \to -\infty$, kun $m \to -\infty$. Tästä siis seuraa, että:

$$\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) = -\infty$$

Siten epäyhtälö (2.15) on tosi.

iv Tarkastellaan viimeisenä tilannetta, jossa $p = 1$ ja $\beta_n > 0$.
Selvästi jos $\alpha_n + \beta_n = 1$, niin kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ riskitasoparametri $\alpha_i = 0$ ja $RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) = RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X)$. Tällöin infkonvoluution määritelmän 2.11 nojalla:

$$\begin{aligned}
\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X) &\leq \sum_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) \\
&= RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) + \sum_{i=1}^{n-1} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) \\
&= RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X) + \sum_{i=1}^{n-1} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i)
\end{aligned}$$

Tarkastelemalla indikaattorifunktioita tapauksissa X_i, $i = 1, \ldots, n-1$, kun riskitasoparametrit $\alpha_i = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, saadaan kirjoitettua:

$$\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X) \leq RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X)$$
$$= RVaR_{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\beta_n}(X)$$

Tarkastellaan sitten tilannetta $\alpha_n + \beta_n < 1$. Olkoon nyt $m = VaR_q(X)$ jollain $q \in (\alpha_n + \beta_n, 1) \cap (1 - \beta_n, 1)$. Embrechts ym [1] lauseen 2 todistuksen mukaan saadaan:

$$RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) = RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X\,\mathbb{1}_{\{U_X \leq \alpha_n+\beta n\}} + Var_q(X)\,\mathbb{1}_{\{U_X > \alpha_n+\beta_n\}})$$
$$= \frac{1}{\beta_n}\left(\int_{1-\beta_n}^{q} VaR_\gamma(X)\,d\gamma + (1-q)VaR_q(X)\right)$$

Selvästikin, kun $q \to 1$, niin:

$$\frac{1}{\beta_n}\left(\int_{1-\beta_n}^{q} VaR_\gamma(X)\,d\gamma + (1-q)VaR_q(X)\right) \overset{q\to 1}{\to} \frac{1}{\beta_n}\int_{1-\beta_n}^{q} VaR_\gamma(X)\,d\gamma$$

Täten:

$$\mathop{\square}_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X) \leq \frac{1}{\beta_n}\int_{1-\beta_n}^{q} VaR_\gamma(X)\,d\gamma$$
$$= RVaR_{1-\beta_n,\beta_n}(X)$$
$$= RVaR_{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\beta_n}(X)$$

Kohdan 2 alakohdista (i)-(iv) seuraa siis, että epäyhtälö (2.15) pätee kaikilla riskitasoparametreilla. Tämän johodosta voidaan kohtien 1-2 perusteella todeta, että lauseen 2.2 yhtälö (2.13) on tosi ja optimaalinen allokaatio voidaan todella kirjoittaa kaavan (2.14) mukaisesti.

$\square$

Jos nyt oletetaan, että $X \geq 0$ ja asetetaan $m = 0$, niin pareto-optimaalinen allokaatio voidaan kirjoittaa muodossa:

$$X_i = X\,\mathbb{1}_{\{1-\sum_{k=1}^{i}\alpha_k < U_X \leq 1-\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_k\}}, \quad i = 1,\ldots,n-1$$
$$X_n = X\,\mathbb{1}_{\{U_X \leq 1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\}}. \tag{2.16}$$

Yhtälöiden (2.16) mukainen pareto-optimaalinen allokaatio on siis tilanne, jossa jokainen toimija $i = 1, \dots, n-1$ ottaa riskin X_i, johon liittyy tappion todennäköisyys $\mathbb{P}(X_i > 0) = \alpha_i$, mistä seuraa, että $RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) = 0$. Viimeinen toimija eli toimija n ottaa loput riskistä ja siten $RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n) = RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i,\beta_n}(X)$, joka on positiivinen, mikäli kokonaisriski X on positiivinen. Parametri β_i voidaan tulkita toimijan i herkkyytenä tappioon, joka ylittää α_i-todennäköisyystason. [1]

3 Tasapainoallokaation olemassaolo

Kappaleessa 2.3 määriteltiin Arrow-Debrew-tasapaino (määritelmä 2.9), joka on siis pari $(\psi, (X_1^*, \dots, X_n^*))$, jossa ψ on tasapainohinnoittelija ja $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ tasapainoallokaatio. Lisäksi löydettiin funktio, joka kuvaa toimijan minimoimaa riskiä annetuissa kilpailullisissa olosuhteissa. Se on esitetty yhtälössä (2.12), ja sen optimia eli minimikohtaa, siis tutkitaan. Kappaleessa 2.4 määriteltiin ensin käsite Pareto-optimaalisuus (määritelmä 2.10), minkä jälkeen löydettiin eräs Pareto-optimaalinen allokaatio, joka on esitetty yhtälössä (2.16). Pareto-optimaalisuuden todettiin liittyvän sellaisen riskinjaon optimiin, jossa toimijat tekevät yhteistyötä kilpailullisen asetelman sijaan. Tässä kappaleessa tavoitteena on osoittaa, että tietyin parametrioletuksin, löytyy sellainen hinnoittelija, että se yhdessä kappaleessa 2.4 löydetyn Pareto-optimaalisen allokaation kanssa on itseasiassa myös kappaleen 2.3 määritelmän 2.9 mukainen Arrow-Debrew-tasapaino.
Aloitetaan tämä kuten Embrechts ym [1] artikkelissaan näyttämällä, että Arrow-Debrew-tasapainoallokaation on oltava Pareto-optimaalinen.

Lause 3.1. Olkoon $X \in \mathcal{X}_+$ ja oletetaan, että $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \beta_n < 1$ ja olkoon lisäksi $(\psi, (X_1^*, \dots, X_n^*)) \in \Psi \times \mathbb{A}_n(X)$ jokin Arrow-Debrew-tasapaino kuvaukselle (2.11). Tällöin allokaatio $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ on Pareto-optimaalinen allokaatio RVaR-mitoille $i = 1, \dots, n$: $RVaR_{\alpha_i, \beta i}(X)$.

Lauseen 3.1 todistus noudattaa Embrechts ym [1] liitteessä A.3 esitettyä todistusta.

Todistus. Yhtälöiden (2.14) muodosta käy ilmi, että on olemassa sellainen allokaatio $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathbb{A}_n(X)$ siten, että $0 \leq Y_i \leq X$ kaikilla $i = 1, \dots, n$, ja jolle pätee:

$$\sum_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i, \beta_i}(Y_i) = RVaR_{\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta_n}(X) \tag{3.1}$$

Koska $(\psi, (X_1^*, \dots, X_n^*))$ on Arrow-Debrew-tasapaino, niin määritelmän 2.9 nojalla kaikilla $i = 1, \dots, n$ pätee:

$$RVaR_{\alpha_i, \beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X_i^*] \leq RVaR_{\alpha_i, \beta_i}(Y_i) - \mathbb{E}[\psi Y_i] \tag{3.2}$$

Koska $(Y_1, \dots, Y_n)$ ja $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ ovat allokaatioita, ne toteuttavat clearing-ehdon ja siten $\sum_{i=1}^n X_i^* = X = \sum_{i=1}^n Y_i$. Täten odotusarvon lineaarisuuden nojalla:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X] &= \sum_{i=1}^{n} (RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X_i^*]) \\ &\overset{(3.2)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(Y_i) - \mathbb{E}[\psi Y_i]) \\ &\overset{(3.1)}{=} RVaR_{\alpha,\beta_i}(X) - \mathbb{E}[\psi X]\end{aligned}$$

Tästä seuraa suoraan odotusarvot supistamalla, että:

$$\sum_{i=1}^{n} RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) \leq RVaR_{\alpha,\beta_i}(X)$$

ja lauseen 2.2 nojalla $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ on pareto-optimaalinen allokaatio.

□

Embrechts ym [1] kertoo lauseen 3.1 olevan erityinen muoto taloustieteestä tutusta ensimmäisestä hyvinvoinnin peruslauseesta, joka kertoo tehokkaiden markkinoiden tasapainoallokaation olevan samalla myös Pareto-optimaalinen allokaatio. Lause 3.1 siis kertoo, että mikäli löytyy Arrow-Debrew tasapaino, sen on oltava Pareto-optimaalinen, mutta ei ota kantaa, onko tällaista tasapainoa ollenkaan olemassa. Seuraava lause yhdistää kappaleiden 2.3 ja 2.4 tulokset kokonaisuudeksi, sillä se kertoo, että tietyin edellytyksin tällainen Arrow-Debrew-tasapaino todella löytyy. Lisäksi siinä esitetään tasapainoon liittyvä hinnoittelija.

Lause 3.2. Merkitään $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha^* = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$ ja $\beta = \beta_n = \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i$. Oletetaan, että $\alpha + \beta < 1$ ja satunnaismuuttujalle $X \in \mathcal{X}_+$ pätee $\mathbb{P}(X > 0) \leq \max\{\alpha^* + \beta, \alpha\}$. Olkoon $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ kuten yhtälöissä (2.16). Olkoon hinnoittelija ψ:

$$\psi = \min\left\{\frac{x}{X\beta}, \frac{1}{\beta}\right\} \mathbb{1}_{\{X\beta > 0\}} \text{ , missä } x = VaR_\alpha(X). \tag{3.3}$$

Tällöin $(\psi, (X_1^*, \ldots, X_n^*))$ on Arrow-Debrew-tasapaino yhtälölle (2.11).

Todistetaan lause 3.2 noudattaen jälleen Embrechts ym artikkelin [1] kappaleen 5.1 lauseen 2 todistusta.

Todistus. Palautetaan mieleen kaksi kappaleessa 2.4 lauseen 2.2 todistuksessa havaittua yhtäsuuruutta:

$$RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) = 0 \text{ , kun } i = 1, \ldots, n-1 \tag{3.4}$$

ja

$$RVaR_{\alpha_n,\beta_n}(X_n^*) = RVaR_{\alpha,\beta}(X) \text{ , kun } p = \alpha + \beta < 1 \tag{3.5}$$

Jaetaan lauseen todistus kahteen osaan.

1. Oletetaan ensin, että $\mathbb{P}(X > 0) \leq \alpha$
   Lauseen 2.2 todistuksen perusteluiden mukaisesti voidaan päätellä, että $RVaR_{\alpha_n,\beta n}(X_n^*) = RVaR_{\alpha,\beta}(X) = 0$ ja $x = VaR_\alpha(X) = 0$, joten tällöin myös $\psi = 0$.
   Toisaalta mille tahansa $0 \leq X_i \leq X$ pätee:

   $$RVaR_{\alpha_i,\beta i}(X_i) - \mathbb{E}[\psi X_i] = RVaR_{\alpha_i,\beta i}(X_i) \geq 0$$

   Täten $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ on määritelmän 2.9 mukainen tasapainoallokaatio ja siten pari $(\psi, (X_1^*, \ldots, X_n^*))$ on Arrow-Debrew-tasapaino.

2. Oletetaan sitten, että $\alpha < \mathbb{P}(X > 0) \leq \alpha^* + \beta$

   Tästä seuraa, että $\beta > 0$ ja että $x = VaR_\alpha(X) > 0$. Olkoon $X_i \in \chi$, kaikilla $i = 1, \ldots, n$, sellainen, että $0 \leq X_i \leq X$.

   Todistettavan lauseen hinnoittelijalle pätee:

   $$\psi X \leq \frac{x}{\beta} \tag{3.6}$$

   Tarkastellaan yhtälön (2.11) odotusarvoa, jota voidaan arvioida ylöspäin seuraavasti:

   $$\mathbb{E}[\psi\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i] \leq \mathbb{E}[\psi X\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}]$$

   Nyt hyödyntämällä yhtälöä (3.6), voidaan edellistä odotusarvoa arvioida ylöspäin lisää seuraavasti:

   $$\mathbb{E}[\psi\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i] \leq \mathbb{E}[x\beta\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}]$$

   Koska x ja β eivät ole satunnaismuuttujia, voidaan päätellä, että:

   $$\mathbb{E}[\psi\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i] \leq \frac{x\alpha_i}{\beta} \tag{3.7}$$

Toisaalta taas lauseessa määritellylle hinnoittelijalle pätee myös:

$$\psi \leq \frac{1}{\beta} \tag{3.8}$$

Nyt samaa yhtälön (2.11) odotusarvoa voidaan arvioida ylöspäin yhtälön (3.8) avulla seuraavasti:

$$\mathbb{E}[\psi\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i] \leq \frac{1}{\beta}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i]$$

Huomataan, että oikealla oleva odotusarvo voidaan itseasiassa kirjoittaa VaR-mitan integraalina, jolloin odotusarvon arvio näyttää seuraavanlaiselta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i] &\leq \frac{1}{\beta} \int_{\alpha_i}^{1} VaR_\gamma(X_i)\, d\gamma \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+\beta} VaR_\gamma(X_i)\, d\gamma \end{aligned}$$

Viimeinen integraalilauseke on selvästi suoraan RVaR-mitan määritelmä 2.6 ja odotusarvolle saadaan siten seuraava yläraja:

$$\mathbb{E}[\psi\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i] \leq RVaR_{\alpha_i,\beta}(X_i)$$

Koska $\beta \geq \beta_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, ylärajaksi saadaan:

$$\mathbb{E}[\psi\, \mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha_i\}}\, X_i] \leq RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) \tag{3.9}$$

Nyt yhdistämällä epäyhtälöt (3.7) ja (3.9) voidaan arvioida tarkasteltavaa odotusarvoa seuraavasti:

$$\mathbb{E}[\psi X_i] \leq \frac{x\alpha_i}{\beta} + RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) \tag{3.10}$$

Uudelleen järjestelemällä epäyhtälön (3.10) termit, saadaan epäyhtälö kirjoitettua muodossa:

$$RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) - \mathbb{E}[\psi X_i] \geq -\frac{x\alpha_i}{\beta} \tag{3.11}$$

Seuraavaksi näytetään vielä, että allokaatiolle $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ pätee tarkemmin:

$$RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X_i^*] = -\frac{x\alpha_i}{\beta}$$

Olkoon joukot A_i, kun $i = 1, \ldots, n$ seuraavanlaisia:

$$A_i = \left\{1 - \sum_{k=1}^{i} \alpha_k < U_X \leq 1 - \sum_{k=1}^{i-1}\right\} \overset{(2.16)}{\subset} \{U_X \geq 1 - \alpha\}$$

Nyt allokaatio $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ voidaan kirjoittaa joukkojen A_i avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} X_i^* &= X\,\mathbb{1}_{A_i} \text{ ,kun } i = 1, \ldots, n-1 \\ X_n^* &= X\,\mathbb{1}_{A_n} + X\,\mathbb{1}_{\{U_X < 1-\alpha\}} \end{aligned}$$

VaR-mitan määritelmästä 2.5 ja siitä, että $x/X = Var_\alpha(X)/X$ seuraa suoraan, että $x/X > 1$, kun $U_X < 1 - \alpha$ ja vastaavasti $x/X \leq 1$, kun $U_X \geq 1 - \alpha$. Täten hinnoittelija saadaan muotoon:

$$\psi = \frac{x}{X\beta}\,\mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha\}} + \frac{1}{\beta}\,\mathbb{1}_{\{U_X < 1-\alpha\}} \tag{3.12}$$

Koska $RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) = 0$ kaikille $i = 1, \ldots, n-1$, niin kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ pätee:

$$RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X_i^*] = -\,\mathbb{E}[\psi X_i^*]$$

Sijoittamalla yhtälön oikealle puolelle hinnoittelija yhtälöstä (3.12), voidaan tämä kirjoittaa muotoon:

$$RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X_i^*] = -\,\mathbb{E}[\frac{x}{X\beta}\,\mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha\}}\,X\,\mathbb{1}_{A_i}]$$

Hieman lisää sieventämällä päästään yhtälön (3.13) muotoon:

$$RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X_i^*] = -\,\mathbb{E}[\frac{x}{\beta}\,\mathbb{1}_{A_i}] = -\frac{x\alpha_i}{\beta} \tag{3.13}$$

ja vastaavasti viimeiselle toimijalle:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi X_n^*] &= \mathbb{E}[\frac{x}{X\beta}\,\mathbb{1}_{\{U_X \geq 1-\alpha\}}\,X\,\mathbb{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[\frac{1}{\beta}\,\mathbb{1}_{\{U_X < 1-\alpha\}}\,X] \\
&= \frac{x\alpha_n}{\beta} + \frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{1} VaR_\gamma(X)\,d\gamma \\
&= \frac{x\alpha_n}{\beta} + \frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} VaR_\gamma(X)\,d\gamma \\
&= \frac{x\alpha_n}{\beta} + RVaR_{\alpha,\beta}(X)
\end{aligned}$$

joten

$$RVaR_{\alpha,\beta}(X^*) - \mathbb{E}[\psi X_n^*] = RVaR_{\alpha,\beta}(X) - \mathbb{E}[\psi X_n^*] = -\frac{x\alpha_n}{\beta} \tag{3.14}$$

Täten epäyhtälöstä (3.11) sekä yhtälöistä (3.13) ja (3.14) saadaan, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$:

$$RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i) - \mathbb{E}[\psi X_i] \geq -\frac{x\alpha_i}{\beta} = RVaR_{\alpha_i,\beta_i}(X_i^*) - \mathbb{E}[\psi X_i^*]$$

Näin ollen kohdista 1 ja 2 seuraa, että pari $(\psi, (X_1^*, \ldots, X_n^*))$ on Arrow-Debrew-tasapaino.

□

Todistus koostui siis kahdesta erilaisesta tapauksesta, joista ensimmäisessä oletettiin, että $\mathbb{P}(X > 0) \leq \alpha$, mistä seurasi, että hinnoittelija $\psi = 0$. Jokainen toimija toisin sanoen ottaa riskin, jonka vaikutus heidän riskimittoihinsa on nolla, joten tästä oletettavasti seuraa, että sellaisen riskin tasapainohinta on myös nolla. Toisessa tapauksessa oletettiin, että $\alpha < \mathbb{P}(X > 0) < \alpha^* + \beta$, jolloin tasapainohinnoittelijaksi löytyy epätriviaali hinnoittelija $\psi = \min\left\{\frac{x}{X\beta}, \frac{1}{\beta}\right\}\mathbb{1}_{\{X\beta>0\}}$. Mikäli $X \geq x = VaR_\alpha(X)$, hinnoittelija saa muodon $\psi = \frac{x}{X\beta}$, joka Embrechts ym [1] mukaan on samanlainen kuin Arrow-Debrew-tasapainohinnoittelijan logaritmiselle hyödyn maksimoijille.

4 Salkunvalintaonglema ja riskimitat

Tässä kappaleessa tarastellaan sellaista esimerkkitilannetta, jossa sijoitussalkku valitaan Capital Asset Pricing -mallin eli CAP-mallin mukaisesti ja verrataan sitä kilpailevaan, sopivasti valittuun toiseen salkkuun. Vertailun tarkoituksena on näyttää, että varianssin käyttö riskimittana ei aina ole välttämättä optimaalista.

CAP-malli on erittäin tunnettu ja käytetty salkun valintamalli, jonka avulla hinnoitellaan arvopapereita. Ajatus on se, että sijoittaja pyrkii minimoimaan riskiä, kun tuottotaso on annettu tai toisinpäin maksimoimaan tuottoa, kun hyväksyttävä riskitaso on kiinnitetty. CAP-mallissa salkun tuottoa mitataan odotusarvolla ja riskimittana käytetään varianssia. Idea salkkua valittaessa on se, että ensin päätetään odotustuotto, minkä jälkeen muodostetaan salkku, joka antaa kyseisen odotustuoton ja jonka varianssi on pienin mahdollinen. CAP-malli on kuvattu esimerkiksi Nyrhisen opetusmonisteessa [3] kappaleessa 8.

Kuten kappaleessa 2.1.1 kerrottiin, varianssi ei täytä kaikkia toivottuja matemaattisia ominaisuuksia rahoitusriskimitalta. Kappaleessa esitellyistä riskimitoista VaR ja RVaR sekä ES täyttävät nämä ominaisuudet, minkä lisäksi ES-mitta täyttää jopa koherentin riskimittan ominaisuudet.

Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitetaan tarkastelu sellaisiin markkinoihin, joissa on pelkkiä riskillisiä arvopapereita. Tarkastellaan siten tilannetta, jossa sijoitetaan sellaiselle yhden periodin markkinalle, jossa on kolme riskillistä arvopaperia, eikä nollakuponkibondia lainkaan.

4.1 CAP-mallin mukainen optimaalinen salkku

Noudatetaan tässä soveltuvin osin Nyrhisen [3] käyttämiä merkintöjä, joita löytyy CAP-mallin kuvaavan kappaleen 8 lisäksi kappaleesta 5.1. Rajoitutaan tapaukseen $n = 3$ eli sijoittaja voi hetkellä 0 hankkia salkun $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T \in \mathbb{R}^3$, jossa θ_n, $n = 1, 2, 3$, on siis arvopaperin i lukumäärä salkussa θ. Tässä - kuten myös Nyrhisen monisteessa [3] - sallitaan arvopapereille reaaliset lukumäärät. Sijoittajan maksettavaksi hankitusta salkusta tulee hinta:

$$S(0)\theta = \sum_{n=1}^{3} S_n(0)\theta_n$$

missä $S(0) = (S_1(0), S_2(0), S_3(0))$ on hetken 0 hintavektori, joka on tunnettu ja deterministinen ja jossa $S_n(0)$ on arvopaperin n hinta hetkellä 0. Hetkellä 1 salkun arvo saadaan hetken 1 hintavektorin avulla seuraavasti:

$$S(1)\theta = \sum_{n=1}^{3} S_n(1)\theta_n$$

missä $S(1)$ eli hetken 1 hintavektori on satunnaismuuttuja ja sen arvo siis hetkellä 0 salkkua valittaessa tuntematon.

Olkoon $x > 0$ sijoitettava kokonaisrahamäärä. Oletetaan lisäksi, että määrä x_n sijoitetaan arvopaperiin n $(= 1, 2, 3)$. Eri arvopapereihin sijoitettujen määrien on summauduttava kokonaisrahamääräksi, joten: $x = \sum_{n=1}^{3} x_n$. Hetkellä 0 arvopaperisalkussa on siis θ_n kappaletta arvopaperia n, ja nyt θ_n voidaan kirjoittaa:

$$\theta_n = \frac{x_n}{S_n(0)}$$

Merkitsemällä $w_n = x_n/x$ muodostuu vektori $W = (w_1, w_2, w_3)^T$, joka kuvaa sijoitusten jakaumaa rahassa mitattuna ja sitäkin voidaan kutsua salkuksi. Olkoon R_n arvopaperin n tuottoaste:

$$1 + R_n = \frac{S_n(1)}{S_n(0)}$$

Arvopaperin n tuottoaste voidaan kirjoittaa myös toisessa muodossa:

$$R_n = \frac{S_n(1) - S_n(0)}{S_n(0)} \tag{4.1}$$

Tuottoaste R_n on siis satunnaismuuttuja. Sijoitettavaa määrää x ja jakaumaa W vastaavaksi tuottoasteeksi $R(x, W)$ saadaan siten:

$$R(x, W) = \sum_{n=1}^{3} w_n R_n \tag{4.2}$$

Täten tuottoasteen odotusarvo eli odotustuottoaste arvopaperille n on:

$$r_n = \mathbb{E}\left[R_n\right] \overset{(4.1)}{=} \mathbb{E}\left[\frac{S_n(1) - S_n(0)}{S_n(0)}\right] \tag{4.3}$$

Koko salkkua vastaava odotustuottoaste voidaan kirjoittaa tuottoasteiden odotusarvojen avulla seuraavasti:

$$\mathbb{E}\left[R(x, W)\right] = \sum_{n=1}^{3} w_n r_n \tag{4.4}$$

Salkun riskiä kuvataan siis CAP-mallissa varianssilla. Odotustuottoasteen varianssi eli riski saadaan määritettyä seuraavasti:

$$Var\left[\mathbb{R}(x,W)\right] \overset{(4.2)}{=} Var\left[\sum_{n=1}^{3} w_n R_n\right] = \sigma^2(W) \tag{4.5}$$

CAP-mallissa salkun valintaongelman ratkaisun muodostaminen lähtee siis siitä, että sijoittaja määrittää haluamansa kiinteän odotustuottoasteen r. Odotustuottoasteen pohjalta salkku valitaan siten, että tällä tuotolla riski eli odotustuottoasteen varianssi $\sigma^2(W)$ minimoituu.

Kun markkinoilla on ainaoastaan riskillisiä arvopapereita, sille löytyy CAP-mallin mukainen optimisalkku Nyrhisen [3] kappaleen 8.2 mukaan seuraavasti, kunhan $r_m \neq r_n$ joillain $m, n = 1, 2, 3$. Tämä vaatimus tarkoittaa siis sitä, että vähintään yhden arvopaperin odotustuottoasteen on oltava erisuuri kuin muiden. Olkoon C vektorin $(R_1, R_2, R_3)^T$ kovarianssi matriisi eli $C_{n,m} = \left[\mathbb{E}\left[(R_n - r_n)(R_m - r_m)\right]\right]_{n,m}$, $m, n = 1, 2, 3$. Olkoot vektorit $\mathbf{1} = (1, 1, 1)^T$ ja $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$. Tällöin minimaalinen varianssi $\sigma^2(r)$ on kaavan (4.6) mukainen:

$$\sigma^2(r) = ar^2 + br + c \tag{4.6}$$

missä kertoimet ovat:

$$a = \frac{a'}{D},\ b = -\frac{2b'}{D} \text{ ja } c = \frac{c'}{D}$$

joissa olevat parametrit a', b', c' ja D saadaan kovarianssimatriisin avulla ja ne ovat: $a' = \mathbf{1}^T C^{-1}\mathbf{1}$, $b' = \mathbf{r}^T C^{-1}\mathbf{1}$, $c' = \mathbf{r}^T C^{-1}\mathbf{r}$ ja $D = a'c' - b'^2 > 0$. Tällöin varianssin minimoiva salkku $W(r)$ on yksikäsitteinen ja se on:

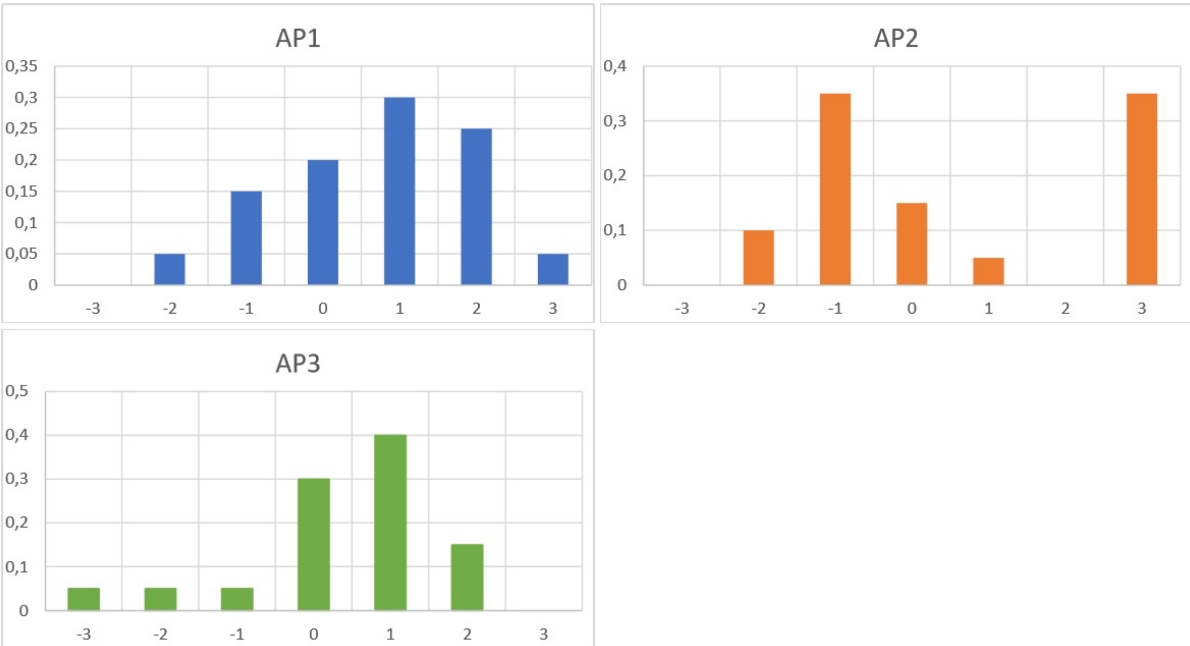
$$W(r) = C^{-1}(\lambda_1 \mathbf{r} + \lambda_2 \mathbf{1}) \tag{4.7}$$

minkä parametrit λ_1 ja λ_2 saadaan kaavoista:

$$\lambda_1 = \frac{a'r - b'}{D} \text{ ja } \lambda_2 = \frac{c' - b'r}{D}.$$

4.2 Arvopaperit

Tarkastelemme siis yhden periodin markkinoita, joilla on kolme riskillistä arvopaperia. Olkoot arvopaperit AP1, AP2 ja AP3 ja oletetaan, että niiden tuottoasteiden todennäköisyysjakaumat ovat diskreettejä ja kuvan 4.1 mukaisia.



Kuva 4.1: Riskillisten arvopaperien AP1, AP2 ja AP3 tuottoasteiden R_1, R_2 ja R_3 pistetodennäköisyysjakaumat

Kuvan 4.1 perusteella voidaan suoraan havaita, että arvopaperien AP2 ja AP3 varianssit ovat suuremmat kuin arvopaperin AP1. Arvopaperin AP2 todennäköisyysjakauma näyttää kaksihuippuiselta ja arvopaperin AP3 vinolta. Pistetodennäköisyysjakaumien perusteella voidaan määrittää arvopapereiden tuottoasteiden odotusarvot ja varianssit. Tuottoasteiden odotusarvoiksi saadaan siten:

$$r_1 = \mathbb{E}[R_1] = 0,7 \; ; \; r_2 = \mathbb{E}[R_2] = 0,55 \text{ ja } r_3 = \mathbb{E}[R_3] = 0,4$$

ja variansseiksi vastaavasti:

$$\text{Var}[R_1] = 1,61 \; ; \; \text{Var}[R_2] = 3,35 \text{ sekä } \text{Var}[R_3] = 3,44$$

Huomataan, että arvopaperin AP1 odotusarvo on korkein ja varianssi pienin ja arvopaperin AP3 odotusarvo puolestaan pienin ja varianssi suurin. Arvopaperin AP2 arvot ovat näiden välistä.

Arvopaperit AP1, AP2 ja AP3 eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan tietyissä mahdollisissa hetken 1 tiloissa (ω) ne saavat tietyt arvot ja näillä hetken 1 tiloilla on tietyt todennäköisyydet ($\mathbb{P}(\omega)$). Oletetaan, että nämä ovat tiedossa ja ne ovat alla olevan kuvan 4.2 taulukon mukaiset. Taulukoosa 4.2 on esitetty arvopaperien AP1, AP2 ja AP3 vastaavien tuottoasteiden R_1, R_2 ja R_3 yhteisjakauma omegoittain.

ω	P(ω)	R1	R2	R3
1	0,05	-2	2	1
2	0,05	-1	0	-1
3	0,10	-1	-1	2
4	0,10	0	-1	-3
5	0,10	0	-1	-2
6	0,10	1	-2	2
7	0,10	1	3	2
8	0,10	1	3	2
9	0,10	2	3	-2
10	0,15	2	0	1
11	0,05	3	1	-1

Kuva 4.2: Tuottoasteiden eli satunnaismuuttujien R_1, R_2 ja R_3 arvot hetken 1 mahdollisissa eri tiloissa ($\omega = 1, \ldots, 11$) ja niitä vastaavat todennäköisyydet ($\mathbb{P}(\omega)$).

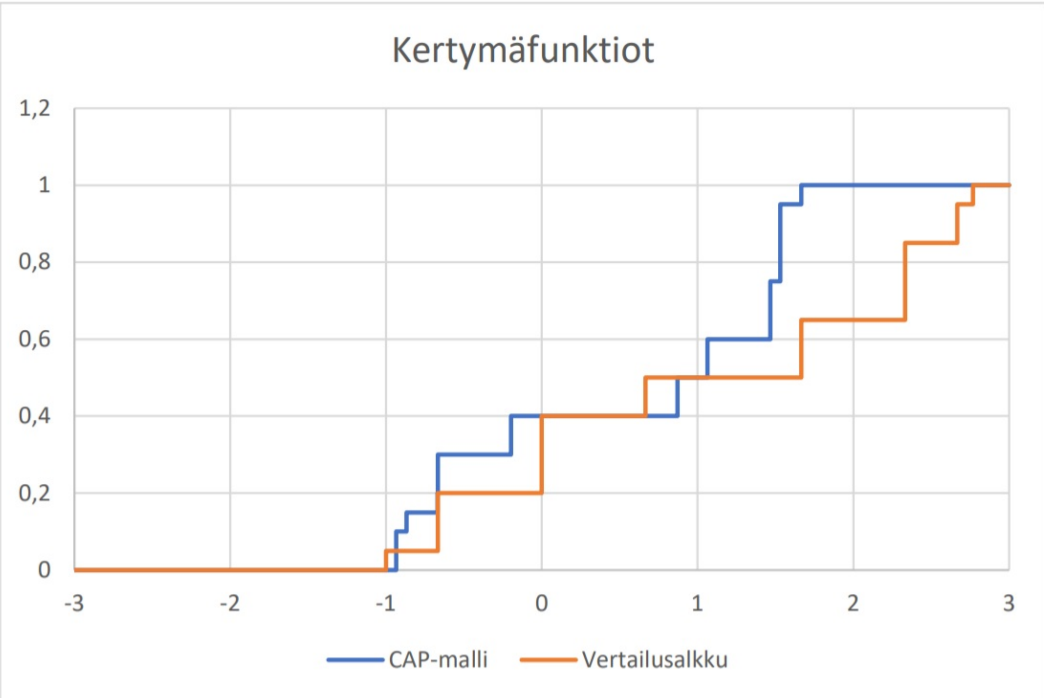
Kun taulukon 4.2 hetken 1 tilat, tiloja vastaavat todennäköisyydet ja niitä vastaavat satunnaismuuttujien R_1, R_2 ja R_3 arvot tunnetaan, saadaan määritettyä satunnaismuuttujien keskinäiset kovarianssit. Arvopaperin AP1 tuottoasteen R_1 ja arvopaperin AP2 tuottoasteen R_2 kovarianssiksi saadaan $\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = 0,67$ ja vastaavasti $\mathrm{Cov}(R_2, R_3) = 0,33$ sekä $\mathrm{Cov}(R_1, R_3) = -0,18$. Näin ollen tunnemme arvopapereiden kovaranssimatriisin, joka kuvaa arvopapreiden välistä riippuvuutta.

4.3 Arvopaperisalkut

Tässä kappaleessa muodostetaan kaksi erilaista salkkua, toinen muodostetaan kappaleen 4.1 mukaisesti CAP-mallin optimaalisena salkkuna ja toinen on taas vertailusalkku, jonka on tarkoitus haastaa CAP-mallin mukaista salkkua. Otetaan tavoitteeksi odotustuotto $r = 0,6$.

Kappaleen 4.1 mukaisesti optimaaliseksi salkuksi sellaisilla markkinoilla, joilla on kappaleessa 4.2 esitetyt arvopaperit saadaan $W_{CAP}(0,6) = (0,6000, 1320, 267)^T$. Olkoon vertailusalkku $W_{vertailu}(0,6) = (0,3330,6670)^T$. Koska CAP-mallin mukainen salkku on määritetty minimoimalla varianssi annetulla odotustuotolla ja molempien salkkujen odotustuotto on sama, niin voidaan todeta, että $\mathrm{Var}(W_{CAP}(0,6)) \leq \mathrm{Var}(W_{vertailu}(0,6))$.

Kun nyt salkut tunnetaan, voidaan muodostaa satunnaismuuttujat $R(x; W_{CAP}(0,6))$ ja $R(x; W_{vertailu}(0,6))$ ja määrittää kappaleen 4.2 taulukon 4.2 avulla niiden kertymäfunktiot. Kertymäfunktiot on esitetty alla olevassa kuvassa 4.3.



Kuva 4.3: Salkkujen $W_{CAP}(0,6)$ ja $W_{vertailu}(0,6)$ kertymäfunktiot

Palautetaan mieleen riskimitan VaR määritelmä 2.5 kappaleesta 2.1.1. Tässä esimerkissä tarkastellaan sijoitusta, jossa tuotto on positiivinen toisin kuin työn alkuosassa, jossa tappiot olivat positiivisia. Nyt siis kiinnostavaa on tutkia todennäköisyysjakauman vasemman hännän riskiä oikean asemesta. Tällöin tarkastellaan satunnaismuuttujan $X \in \chi$ riskimittaa VaR riskitasolla α seuraavasti:

$$VaR_\alpha(X) = \sup\{x \in [-\infty, \infty] : \mathbb{P}(X \geq x) \geq 1 - \alpha\}$$

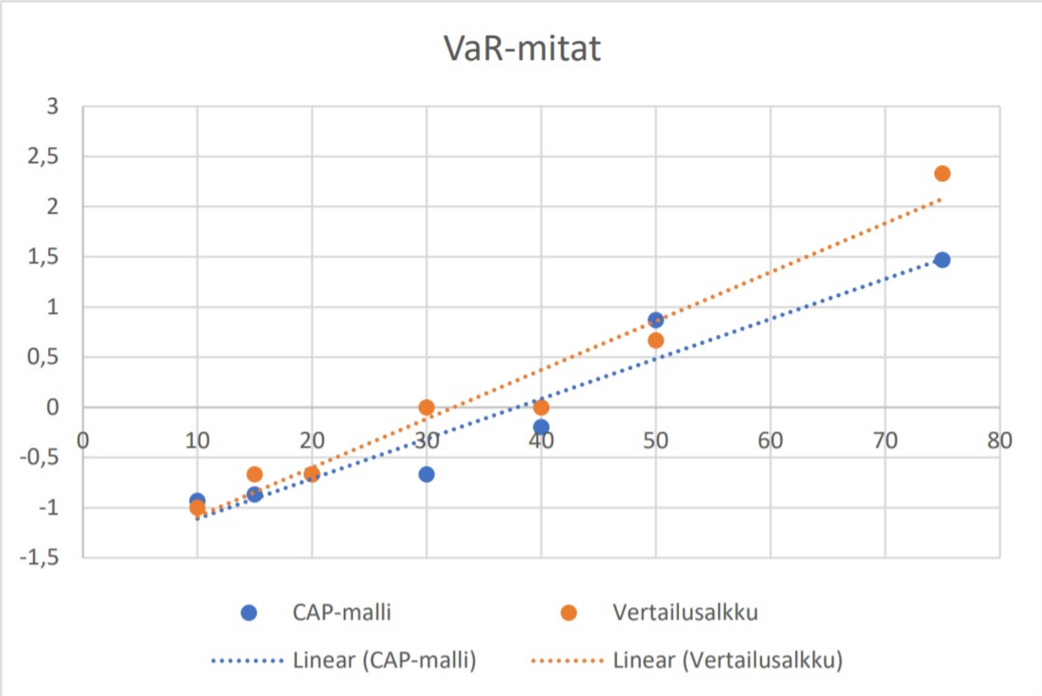
Tässä tarkastelussa, jossa negatiiviset arvot kuvaavat tappioita ja VaR-riskimitta saadaan yllä olevalla kaavalla, mitan suuremmat arvot ovat toivottuja. VaR-mitan arvo siis pyrkii antamaan kuvan siitä, miten pieni salkun arvon odotetaan voivan olla annetulla riskitasolla.

Taulukkoon 4.4 on koottu molempien salkkujen VaR-mittoja eri riskitasoilla (prosentteina).

Riskitaso (α) [%]	$VaR_{\alpha}(W_{CAP})$	$VaR_{\alpha}(W_{vertailu})$
10	-0,934	-1
15	-0,868	-0,667
20	-0,669	-0,667
30	-0,667	0
40	-0,199	0
50	0,87	0,667
75	1,47	2,33

Kuva 4.4: Salkkujen VaR-mittoja eri riskitasoilla

Kuvaan 4.5 on piirretty taulukon 4.4 VaR-arvot riskitason funktiona ja lisätty molempiin joukkoihin lineaariset sovitteet.



Kuva 4.5: Salkkujen VaR-mitat riskitason funktiona. Vaaka-akselilla on riskitaso prosentteina ja pystyakselilla on riskimitan arvo.

Kuvasta 4.5 huomataan, että suurella osalla arvoista vertailusalkun VaR-mitan arvo on suurempi kuin CAP-mallin mukaisen salkun. Tämä tarkoittaa sitä, että vertailusalkulla on näillä arvoilla pienempi riski isompiin tappioihin. Kuvassa 4.5 on myös pisteiden mukaan laskettu lineaarinen sovite. Sovitteet ovat hyvin lähellä toisiaan vasemmassa laidassa ja erkanevat oikeaa laitaa kohti, minkä lisäksi vertailusalkun sovite on kokomatkalta CAP-mallin sovitteen yläpuolella. Tämä kuvastaa sitä, että salkkujen riskit lienevät lähellä toisiaan pienemmillä riskitasoilla ja kauempana toisistaan suuremmilla sekä sitä, että CAP-mallin mukaisen salkun riski suurempiin tappioihin näyttäisi olevan veratilusalkkua suurempi.

Jos tarkastellaan kertymäfunktioita kuvassa 4.3, niin havaitaan, että CAP-mallin salkun todennäköisyydet painottuvat keskemmälle ja vertailusalkun arvot saavat hieman suuremman hajonnan - erityisesti arvojen yläpäässä. Tämä ei ole kovin yllättävä havainto, sillä CAP-mallin mukainen salkkuhan muodostettiin varianssin minimoivaksi. Se, mikä tässä on kiinnostavaa on, että vertailusalkku voi saada suurempia arvoja eli suurempia voittoja, vaikka mahdollisten tappioiden määrät näyttävät olevan hyvin lähellä toisiaan. Näyttäisi siis siltä, että vertaamalla salkkuja VaR-mitan avulla näistä salkuista ei valittaisi

CAP-mallin mukaista salkkua.

5 Johtopäätökset

Työssä on esitelty riskin mittaamista, jakamista ja niiden ongelmia. Riskimitoista tunnetuinpana mittana on esiteltty varianssi, mutta sen todettiin olevan matemaattisilta ominaisuuksiltaan vajavainen edes rahoitusriskimitaksi. Tarkemmin on esitelty rahoitusriskimitoista RVaR-perheen mitat: VaR, RVaR ja ES, joista ES-mitan todettiin olevan jopa koherentti mitta. Vaikka RVaR-mitasta tiedetään, ettei se toteuta subadditiivisuutta, sille on osoitettu kuitenkin erityinen erillisten RVaR-mittojen ja niiden yhdistelmä-RVaR-mitan subadditiivisuusominaisuus.

Riskin jakamista on käsitelty kahdesta lähtökohdasta sekä kilpailullisen riskinjaon tilanteesta eli tasapainoteorian lähtökohdista että yhteistyön näkökulmasta toisin sanoen Pareto-optimaalisuuden kautta. Kiinnostavana lopputulemana on osoitettu, että nämä molemmat johtavat samaan pareto-optimaaliseen tasapainotilaan.

Kappaleen 4 esimerkin tarkoituksena on näyttää, että eri riskimitat voivat antaa erilaisia optimaalisia tuloksia. CAP-malli on erittäin tunnettu ja paljon käytetty malli arvopapereiden hinnoittelussa ja siinä varianssia käytetään riskimittana. Varianssin yksi ongelma on se, että se rankaisee samalla tavalla positiivisesti kuin negatiivisesti poikkeavista arvoista symmetrisen käytöksensä takia, vaikka sijoittajaa kiinnostaa usein vain mahdollisten tappioiden riski. Tätä varianssin heikkoa kohtaa pyrittiin käyttämään hyödyksi esimerkkiä rakennettaessa.

Kappaleen 4 esimerkin arvopaperit ovat hyvin yksinkertainen esimerkki ja niiden jakaumat ovat tarkoitushakuisesti sovitetut tuomaan esiin varianssin heikko kohta. Osittain tästä syystä niiden jakaumat olivat diskreetit ja hyvin yksinkertaiset, mikä puolestaan heikentää VaR-mittojen määräämistä ja tekee RVaR- ja ES-mittojen laskemisesta käytännössä hyödytöntä. Jakaumia muodostettaessa tavoite oli tehdä yksi normaalijakaumaa muistuttava jakauma (AP1) ja kaksi erilaista suuremman varianssin jakaumaa (AP2 ja AP3) (jakaumat esitettiin kuvassa 4.1). Koska CAP-malli valitsee salkun annetun odotustuoton saavuttamiseksi minimivarianssilla, on selvää, että sen on otettava AP1:n lisäksi salkkuun muitakin arvopapereita, jotta haluttu odotustuotto saavutetaan. AP2 ja AP3 varianssit ovat kohtuullisen lähellä toisiaan, mutta arvopaperin 3 odotusarvo kauempana arvopaperin 1 odotusarvosta. Tässä oli tarkoituksena harhauttaa CAP-malli valitsemaan suuremman määrän arvopaperia 3 kuin arvopaperia 2, jolloin salkkuun tulisi vähemmän suuremman varianssin arvopapereita, mutta ne olisivat „huonompilaatuisia". Vertailusalkku taas muodostettiin ajatuksella, että jätetään heikoimman tuoton ja suurimman tappioriskin arvopaperi eli AP3 kokonaan pois. Tässä tapauksessa valitsemalla pelkästään arvopaperia AP1 salkkuun, olisi saavutettu suurempi tuotta pienemällä varianssilla. Tämä on kuitenkin itse tuloksen kannalta epäolennaista, sillä yhtä hyvin tuottoasteet olisivat voineet olla siten, että pienen varianssin arvopaperin tuotto on muita heikompi. Tämä hieman kömpelö esimerkin ominaisuus ei siis kuitenkaan heikennä tarkastelun esiin nostamaa seikkaa, että esimerkiksi erityisesti vinojen jakaumien tapauksessa varianssi ei ole välttämättä optimaalinen riskimitta.

Viitteet

[1] Embrechts, Paul and Liu, Haiyan and Wang, Ruodu, Quantile-Based Risk Sharing (October 24, 2017). Swiss Finance Institute Research Paper No. 17-54. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3099067 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3099067. Tähän työhön käytetty versio ollut saatavilla 13.7.2020: https://people.math.ethz.ch/ embrecht/ftp/quantile_risk_sharing.pdf

[2] Föllmer, Schied: Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time, 3rd Edition,2011, ISBN: 978-3-11-021804-6

[3] Harri Nyrhinen: Sijoitustoiminnan matematiikka, luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2017.